

هو

اصول هندسه

از مقرب الخاقان

آقا میرزا عبدالغفار

نجم الملک سرتیپ مهندس و معلم کل

و مؤلف علوم ریاضی

در مدرسه



مبارکه نظامیه دارال[illegible]

طهران

سنه ۱۲۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین والصلوة والسلام علی محمد وآله اجمعین
وبعد پوشیده نیست که از آنگاه که تاج وتخت خسروی بفرق فرقدسای
وقدم عالم آرای مالک الملوک وسلطان السلاطین خدیو خدیوان کامکار
اعلیحضرت اقدس شهریار جمشید زمان سایه یزدان السلطان بن السلطان
والخاقان بن الخاقان ناصر الدین شاه قاجار خلد الله ملکه ودولته
مباهی ومزین گردیده دولت را نظامی تازه ومملکت را انتظامی بی اندازه حاصل شده
بقسمیکه همه چیز را تفاوت وتوفیر معلوم است خاصه علوم را که در عهد رسوم
دارسه ودر شمار آثار طامسه بود وچشم وجهه همت این خسرو اعلی نهمت از اول دولت
روزافزون احیا وتجدید این مراسم وافشا وتشیید این دعایم بوده وهست
چنانچه تفویض منصب جلیل جلیل وزارت علمیه بشخص اکمل وفرد اوحد نواب مستطاب
اشرف امجد والا اعتضاد السلطنه علیقلی میرزا ادام الله مجده وبنای مدرسه
مبارکه دار الفنون وکثرت معلمین مجد ومتعلمین مستعد وبذل مبالغ خطیره همه ساله
در این راه هریک بی اشتباه شاهدی عدل وگواهی امین است منت چه وصف نمایم

تو خود بیاورین و چون بمقتضای ارادهٔ علیهٔ همایونی و مساعی جمیله وزیر علوم و اهتمامات
وافیهٔ مقرب الخاقان جعفرقلیخان سرتیپ و رئیس و مواظبت تامهٔ مقرب الخاقان محمدحسین خان
سرتیپ ناظم این اوقات جمیع فنون خاصه ریاضی زائدالوصف دایر است و مدار
سایر فنون و صنایع بر مقدمات است خاصه بر علم حساب و هندسه

لهذا حقیر جانی ابن الفاضل الکامل علی محمد عبدالغفار اصفهانی محض ادای
شکر نعمت و استرضای خاطر ملکوتی مظاهر خسروانه و تقدیم خدمت در حضرت
وزارت علیه و انتفاع عموم متعلمین مدرسه مبارکه دارالفنون وغیرهم کتبی
در اصول فنون ریاضی باندازهٔ فکر قاصر تألیف و ترجمه نمود و در اصول حساب [illegible]
ذکر نموده سبب تألیف آن کتب را از جمله آن علوم هندسه اولی است و معروفتر
کتابی که در این علم میانهٔ ما بوده هندسه اقلیدس است که در زمان مامون بن الرشید
از لغت یونانی بعربی ترجمه شد و بعد سلطان المحققین خواجه نصیر علیه الرحمه
آنرا تحریر فرموده اسلوب آن کتاب بعد از وضع قانون جدید در تحصیل پسندیده
نیست چونکه در اصل کتاب اقلیدس اصول و فروع مخلوط اند و بعد از آن خواجه
علیه الرحمه در تحریر آن برای هر شکل وجه اخری ذکر فرموده اند و بلکه در اکثر اشکال
وجوه عدیده و اختلاف وقوع بسیار بیان نموده اند مانند شکل عروس که ۴۹
وجه در آن ذکر شده و چنین کتابی از برای تحصیل مبتدی مناسب نیست و مقصود حقیر نه
توهین آن کتاب است ابدا بلکه اشاره بعدم مناسبت او است برای مبتدی
ولی مطالعهٔ آن برای تتبع و تصرف در براهین و وسعت خیال بسیار خوب است
بالجمله دو کتاب هم در مدرسه مبارکه ترجمه شده یکی از آنها اگرچه خوش اسلوب است
ولی ناقص میباشد و حروف اشکالش فرنگی و کتاب دیگر معایبش بسیار حقیر برای
مدرسه مبارکه دارالفنون دو کتاب در اصول هندسه نوشت یکی تألیفی است مبسوط

اصول و فروعش از هم ممتاز و ضمیمه دارد و مشتمل بر مسائل مفیده و رسیده بسیار که در امور فنون کافی بکار آیند و دیگر همین کتاب موجود است که اسلوبی وارد بنده چونکه اصول جمیع مطالب هندسه اولی بطریق اختصار و بعبارتی مانوس در آن درج شده و نظر باین نکته برای مبتدی مناسب تر است و این اسلوبی است که تا کنون چندین تغییر و تصرف در آن شده تا باینجا رسیده و بالفعل برای تحصیل با انتظام نزد عموم مهندسین مختار افتاده و مشتمل است بر هشت مقاله

اول در خواص خطوط و زوایا و اشکال مفرده

دویم در خواص دایره و مقیاس زوایا

سیم در خواص اشکال کثیرة الاضلاع و مساحت و تشابه آنها

چهارم در خواص اشکال کثیرة الاضلاع منتظم و مساحت دایره

پنجم در خواص اشکال فضائیه یعنی خطوط و سطوحیکه در سطحی مستوی نگنجند

ششم در خواص اجسام کثیرة السطوح

هفتم در خواص کره و متعلقاتش

هشتم در مساحت اجسام مستدیره سه گانه یعنی کره و استوانه و مخروط

عدد اصول احکامیکه در این کتاب مبرهن شده ۲۸۳ است و عدد نتایج و شروح و تنبهاتی که در حقیقت احکام فرعیه اند قریب به ۱۰۰ و عدد احکام مبرهن نمودنی که بی دلیل ذکر شده ۴۶ و عدد مسائل حل کردنی که جوابهاشان بیان شده ۷۵ و مجموعاً ۵۰۴ عدد باشد پس بر متعلمینی که بخواهند مهندس شوند اقلاً لازم است که عموم جمیع این احکام اصلیه و فرعیه را بخاطر بسپارند اگر بتوانند علاوه بر آنها براهین را حفظ کنند

و ترتیب این علم در علوم تحصیلیه بعد از اصول حساب است یا بعد از اصول جبر و مقابله

مقاله اولی

در خواص خطوط و زوایا و اشکال مفرده

حدود

۱ مکان متصرفی محدود جسم را در فضاء نامحدود این عالم **جسم** گوئیم

۲ حدی که مفروز میکند جسم را از فضاء محیطش **سطح** گوئیم

۳ محل تلاقی دو سطح جسم را **خط** گوئیم

۴ محل تلاقی دو خط را **نقطه** گوئیم

۵ بنابراین تعریفات جسم و سطح و خط بی تصور جسم وجود خارجی پیدا نکنند ولی در هندسه آنها را قائم بالذات فرض میکنیم و غیر متعلق باجسامیکه منسوب بودند بآنها

۶ جسم و سطح و خط را عموماً **شکل** گوئیم

۷ فایده علم **هندسه** مساحت وسعت اشکال است و معرفت خواص آنها

۸ خط مستقیم خطی است غیر محدود که چون دو نقطه بر آن فرض کنیم قطعه واقعه مابین آن دو نقطه از آن خط اقصر فاصله باشد مابین آن دو و بعبارت اخری خطی است که وضعش مابین آن دو نقطه ثابت و تغیر ناپذیر باشد و هر جا خط مطلق گوئیم مقصود مستقیم است و از واضحات است که اگر دو خط در جزئی از طول خود بر هم منطبق باشند در مابقی طول البته منطبق میشوند

۹ خط منکسر و شبه کثیر الاضلاع خطی است مرکب از اجزای مستقیمه

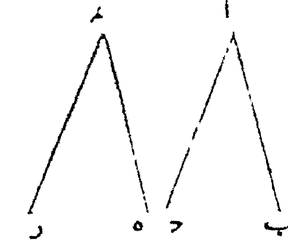
۱۰ خط منحنی آنست که نه مستقیم باشد نه مرکب از اجزای مستقیمه

۱۱ سطح مستوی آنست که چون دو نقطه غیر مشخص بر او فرض شود

تنبیه
تمام اشکال این کتاب را خود تحریر کشیده و مطالب نیز را دو مرتبه بدقت تمام مرور نموده و مرور سیم را عهده یکی از مهندسین متعلمین خود عالیجاه سلیمان خان مهندس ولد مرحوم [illegible] خان نهاد امید است که کمتر سهو و نسیانی در آن واقع شده باشد

را چون آن دو نقطه مستقیم وصل شود تمام این خط بر آن سطح واقع شود و ما هر جا سطح مطلق گوئیم مقصود مستوی است

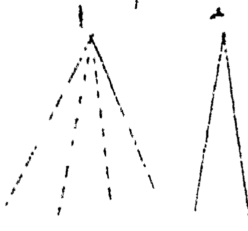
۱۲ سطح منحنی آنست که نه مستوی باشد نه مرکب از اجزای مستویه



۱۳ وضع و کیفیتی را که از تقاطع دو خط مستقیم اب و اح حادث شود زاویه گوئیم ونقطهٔ ا راس زاویه است و دو خط اب و اح ضلعینش

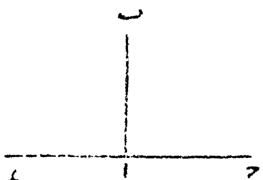
زاویه را گاه بحرف راس ا بنمائیم و گاه بسه حرف باح یا حاب بنابر آنکه حرف راس در وسط افتد

دو زاویه ا و ه را متساوی گوئیم هرگاه بتوان آنها را درست بر هم منطبق ساخت فرض میکنیم زاویه ه بر ا نقل شود بر وجهی که ه د بر اب واقع شود آنوقت اگر ه د بر اح منطبق گشت دو زاویه را متساوی گوئیم



زاویه ا را گوئیم مضاعف و ثلاثه امثال و ... زاویه ه است هرگاه دو مثل این زاویه یا سه مثل و غیره در آن بگنجد

و از این قرار زوایا مثل سایر مقادیر مقیاس پذیرند و میتوان آنها را بهمدیگر سنجید



۱۴ هرگاه خط اب خط حد را بر وجهی تلاقی کند که دو زاویه مجاوره باح و باد متساوی شوند خط اب را

نسبت به حد عمود گوییم و آن دو زاویه را قائمه

و عن قریب مبرهن شود که از نقطه مفروضه ا از خط حد میتوان عمودی بآن خط اخراج نمود و اینکه جمیع زوایای قائمه متساوی هستند

هر زاویه که از قائمه بزرگتر باشد منفرجه اش گوییم و اگر کوچکتر باشد حاده

دو زاویه را متمم و تمام همدیگر گوییم هرگاه مجموعشان یک قائمه باشد

و مکمل و کمال همدیگر گوییم هرگاه مجموعشان دو قائمه باشد

۱۵ دو خط واقع در سطحی را متوازی گوییم

ا ———— ب

هرگاه از هیچ جهت متلاقی نشوند هرچند بینهایت امتداد

ح ———— د

داده شوند در جهتین مثل دو خط اب و حد

۱۶ شکل مسطح سطحی است که از جوانب بخطوط منتهی شود

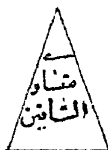
پس اگر خطوط مستقیم باشند وسعت محدوده را شکل مستقیم الاضلاع و کثیر الاضلاع گوییم و مجموع خطوط را محیط آن شکل

۱۷ ساده ترجمیع اشکال کثیر الاضلاع آنست که صاحب سه ضلع باشد و آن را مثلث گوییم

و اگر دارای چهار ضلع باشد ذو اربعة اضلاع و پنج ضلعی را ذو خمسة اضلاع و کذا

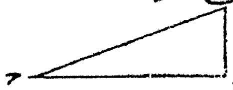
۱۸ مثلث را متساوی الاضلاع گوییم هرگاه هر سه ضلعش متساوی باشد و متساوی الساقین هرگاه دو ضلعش متساوی باشند و مختلفة الاضلاع اگر هیچ کدام برابر نباشند







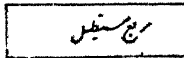
۱۹ مثلث قائم الزاویه آنست که یک زاویه اش قائمه باشد وضلع مقابل بآن زاویه را وتر مطلق گوئیم مثل مثلث ا ب ح و زاویه ا و وتر ب ح



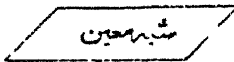
۲۰ در جمله اشکال ذوات اربعه اضلاع مربع است وآن شکلی است که جمیع اضلاعش متساوی باشند وجمیع زوایاش قائمه



ودیگر مربع مستطیل یا مسطح وآن زوایاش قائمه اند واضلاع متقابله متساوی



ودیگر متوازی الاضلاع یا شبه معین

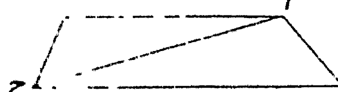


وآن اضلاع متقابله اش متوازی باشند

ودیگر معین وآن اضلاعش متساوی باشد ولی زوایاش قائمه نباشند



ودیگری ذو ذنقه است وآن دو ضلعش تنها متوازی است

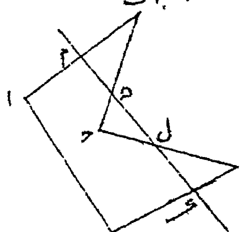


۲۱ ودر هر شکل قطر خطی است واصل مابین دو زاویه غیر مجاوره مثل ا ح

۲۲ ذو کثیر الاضلاع متساویة الاضلاع آنست که اضلاعش متساوی باشند ومتساوی الزوایا آنست که زوایایش متساوی باشند

۲۳ دو ذو کثیر الاضلاع را متساویة الاضلاع گوئیم نسبت بیکدیگر هرگاه اضلاعشان نظیر بنظیر متساوی باشند یعنی مرتب باشند بیک ترتیب بروجهی که ضلع اول یکی مساوی باشد بضلع اول دیگر وضلع دویم بدویم وهکذا وازاین وجه معنی دو ذو کثیر الاضلاع متساویة الزوایا نیز معلوم است ودر اینصورت هر دو ضلع متساوی یا دو زاویه متساویه را متقابله ومتناظره گوئیم

۲۴ . کثیر الاضلاع محدب آنست که هر ضلعش را امتداد دهیم تمام شکل در یک طرفش افتد و محیط چنین کثیر الاضلاع را خط مستقیم بیش از دو نقطه قطع نکند و اگر در مثل شکل ا ب ج د ه خط م ع محیطش را بر چهار نقطه م و ن د ل و ع قطع کند سببش اینست که مثلاً ضلع ب ج که در مابین بر نقطه ن قطع شده در یکطرف شکل نیفتاده یعنی آن شکل محدب نیست



تنبیه چهار مقالهٔ اول این کتاب در اشکال مسطحات یعنی اشکالیکه خطوطشان از یک سطح مستوی خارج نباشد

در شرح اصطلاحات و علامات

علوم متعارفه حکمی است که فی نفسه واضح باشد و احتیاج باقامه دلیل نداشته باشد

قضیه حکمی است محقق که واضح نشود جز بعد از اقامه دلیل و برهان

مسئله مطلبی است وارد که اقتضا کند راه جوابی را

اصول موضوعه حکمی است محقق برای برهان قضیه یا در حل مسئله آنرا استعمال کنیم

ایراد لفظی است مشترک که تعلق گیرد هم بقضیه و هم بمسئله و هم باصول موضوعه

نتیجه حکمی است مستنبط از یک ایراد یا بیشتر

شرح تنبیهی است در خصوص یک ایراد سابق الذکر یا بیشتر که از آن روی معلوم میشود رابطه و فایده و حصر و عمومیت آنها

فرض قرار دادیست در بیان ایراد یا در اقامه برهان

اینصورت = علامت مساوات است مثلاً ج = ه یعنی ج مساوی است با ه

اینصورت < علامت کوچکتریست مثلا اگر بخواهیم بنمائیم که ج کوچکتر است
از د چنین مینویسیم ج < د
اینصورت > علامت بزرگتریست مثلا ج > د یعنی ج بزرگتر است از د
علامت جمع اینست + و آنرا بعلاوه تلفظ کنیم
علامت تفریق اینست − و آنرا منها تلفظ کنیم مثلا ج + د علامت
حاصل جمع دو مقدار ج و د است و ج − د علامت تفاضل آنها یا باقی تفریق
د از ج و همچنین ج − د + ه یا ج + ه − د بانمعنی است که باید ج و ه را
باهم جمع کرده د را از میزان موضوع نمود
اینصورت × علامت ضرب است مثلا ج × د علامت حاصل ضرب ج است
در د وگاه عوض این علامت نقطه قرار دهند باینصورت ج . د وگاه هیچ علامت
قرار ندهند مثل ج د که باز بمعنی حاصل ضرب آن دو مقدار است ولی اینصورترا
بیشتر در جبر ومقابله استعمال کنیم و در جائیکه بدانیم مقصود فاصله بین دو نقطه
ج و د نباشد
اینصورت ج × (د + ه − ح) علامت حاصل ضرب ج است در جمله
د + ه − ح واگر میخواستیم[2] (ج + د) × (ج − د + ه) و در چنین صور
آنچه میانه علامت جامعه نوشته شده حکم مقدار مفرد دارد
هرگاه عددی در جلو خط یا مقداری نوشته شود حکم مضروب فیه آنخط و آنمقدار را دارد
مثلا اگر بخواهیم بنمائیم که خط ج د باید ثلاثه امثال شود چنین مینویسیم ۳ ج د
و نصف زاویه ج را چنین مینویسیم ½ ج
مربع خط ج د چنین نوشته شود ج د² و مکعبش چنین ج د³ واین دو اصطلاح را

[2] ج + د را ضرب کنیم در ج − د + ه حاصل ضرب را چنین مینوشتیم

در مقام خود شرح خواهیم داد

اینصورت √ علامت استخراج ضلع است مثلا √۲ یعنی جذر ۲ است
و √ح × ه یعنی جذر حاصل ضرب ح × ه است یا واسطه هندسی مابین ح و ه

تنبیه کاه در ضمن ادای مطلب میخواهیم نمائیم بعضی روابط را که مابین اشکال باشد از قبیل تشابه در اینصورت هرگاه شکلی را بحروف ا و ب و ج و د ...
نمائیم شکل دیگر را نیز بهمین حروف نمائیم ولی با علامتی باینصورت اُ و بُ و جُ ....
و تلفظ کنیم الف یک و با یک و غیره یا باینصورت اً و بً و جً و ...
و تلفظ کنیم الف دو و با دو و جیم دو و غیره و هکذا

بسیار اتفاق می افتد که مطلبی را بشکل یا بقضیه سابق تذکری حواله دهیم آنوقت باینصورت مثلا بنمائیم س ۱۷ و ق ۳/۱۲ یعنی رجوع کنید بشکل ۱۷ ازمقاله حاضر و به قضیه ۱۲ از مقاله سیم

علوم متعارفه

۱ دو مقدار مساوی با مقدار سیم متساوی باشند

۲ کل بزرگتر است از جزء خود

۳ کل مساویست با مجموع اجزای خود

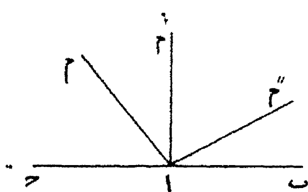
۴ مابین دو نقطه را شوان وصل نمود جز بیک خط مستقیم

۵ دو مقدار را خط باشند یا سطح یا حجم متساوی گوئیم در آنصورت که هرگاه یکی از آنها را بر دیگر قرار دهیم در تمام وسعت خود بر همدیگر منطبق شوند

قضیهٔ اول

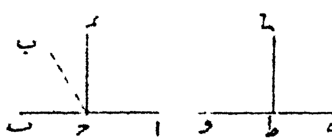
از نقطهٔ مفروضه بر خطی میتوان یك عمود بر آنخط اخراج نمود نه بیش

برهان فرض میکنیم خط ا م اول منطبق باشد بر ا د و بعد حول نقطه ا دوران کند و حادث نماید دو زاویه مجاوره



م ا د و م ا ب را که اولیش م ا د ابتدا بسیار کوچك است و متدرجا ترقی میکند دومینش م ا ب ابتدا بزرگتر از آنست و متدرجا تنزل میکند تا بصفر رسد با ینحرکت زاویه م ا د که ابتدا کوچکتر بود از م ا ب زود بزرگتر میشود و از اینقرار در آن تا بین موضعی برای خط متحرك پیدا میشود مثل ا م که آنجا دو زاویه متساوی باشند و ظاهر است که بیش از یك موضع پیدا نشود

نتیجه جمیع زوایای قائمه متساوی باشند



مثلاً خط د ج عمود است بر ا ب و ح ط بر ه ز و گوئیم زاویه د ج ب مساویست با ح ط ز

برهان خط ه ز را نقل میکنیم بر ا ب چنانچه ط بر ج واقع شود آنوقت ط ح واقع میشود بر ج د والّا لازم آید که از نقطهٔ مفروضه بر خطی میتوان دو عمود بر آنخط اخراج نمود

قضیهٔ دوم

چون خط ج د تلاقی کند ا ب را مجموع دو زاویه مجاوره ا ج د

و ب ح د مساویست با دو قائمه

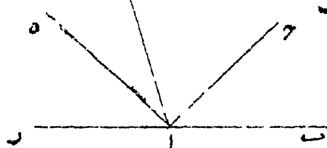
برهان از نقطهٔ ح عمود ح ه را بر خط ا ب اخراج کنید آنوقت زاویه ا ح د مساوی میشود با مجموع دو زاویه ا ح ه و ه ح د پس ا ح د + ب ح د مساوی میشود با مجموع سه زاویه ا ح ه و ه ح د و ب ح د و زاویه اول قائمه است و مجموع دو زاویه دیگر نیز قائمه ب ح ه است پس مجموع دو زاویه ا ح د و ب ح د بقدر دو قائمه است

نتیجه ۱ اگر یکی از دو زاویه ا ح د و ب ح د قائمه باشد دیگر نیز قائمه است

نتیجه ۲ اگر د ه عمود باشد بر ا ب پس بعکس ا ب نیز عمود باشد بر آن

برهان چون د ه عمود است بر ا ب زاویه ا ح د مساوی میشود با مجاوره خود د ح ب و هر دو قائمه اند و چون ا ح د قائمه شد مجاوره اش ا ح ه نیز قائمه باشد پس زاویه ا ح ه = ا ح د پس ا ب عمود است بر د ه

نتیجه ۳ — زوایای متتالیه ب ا ح و ح ا د و د ا ه و ه ا ر که در یک سمت خط ب ر حادث گشته اند مجموعشان مساویست با دو قائمه زیرا که این مجموع بقدر مجموع دو زاویه مجاوره ب ا ح و ح ا ر است



قضیه سیم

هرگاه مجموع دو زاویه مجاوره ا ح د و د ح ب دو قائمه باشد پس دو ضلع خارجی ا ح و ح ب بر استقامت خطی واقع میشوند

برهان اگر ح ب بر استقامت ا ح نباشد فرض میکنیم ح ه بر آن استقامت باشد و آنوقت خط ا ح ه مستقیم است و بنابراین مجموع دو زاویه ا ح د و د ح ه دو قائمه میشود (۲)

ولی بفرض مجموع دو زاویه ا ح د و د ح ب دو قائمه بود پس ا ح د + د ح ب = ا ح د + د ح ه و از طرفین ا ح د را حذف میکنیم باقی میماند د ح ب = د ح ه یعنی جزو مساوی با کل و این محال است پس ح ب واقع است بر استقامت ا ح

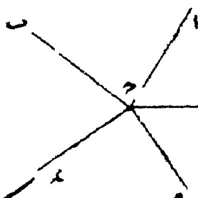
قضیه چهارم

چون دو خط ا ب و د ه متقاطع شوند دو زاویه متقابله برأس مساوی باشند

برهان چون د ه مستقیم است مجموع دو زاویه ا ح د و ا ح ه دو قائمه باشد و چون ا ب مستقیم است مجموع دو زاویه ا ح ه و ب ح ه نیز دو قائمه است پس ا ح د + ا ح ه = ا ح ه + ب ح ه و چون ا ح ه را از طرفین اسقاط کنیم باقی میماند ا ح د مساوی با مقابله خود ب ح ه

و بهمین وجه ثابت میکنیم که زاویه ا ح ه مساویست با مقابله خود ب ح د

شرح مجموع چهار زاویه حادثه در حول نقطهٔ تقاطع دو خط مساویست با چهار قائمه زیرا که مجموع اجه + ب جه دو قائمه است وهکذا مجموع اجد + ب جد وکلیتاً اگر چند خط مثل جا و جب وغیره بر نقطه ج متقاطع شوند مجموع زوایای متوالیه اجب و ب جه و هجر

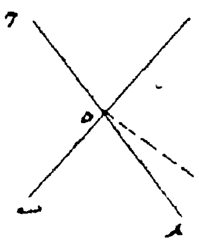


و ه ج د مساوی میشود با چهار قائمه زیرا که اگر بر نقطه ج دو خط رسم کنیم عمود بر یکدیگر حادث میشود چهار قائمه و مجموع آنها مساویست با مجموع زوایای مذکور اجب و غیر

قضیهٔ پنجم

هرگاه بر نقطهٔ ه از خط اب دو خط ه ج و ه د را در طرفینش چنان رسم کنیم که دو زاویه جه ا و ب ه د متساوی شوند گوئیم ه د بر استقامت ه ج واقع میشود

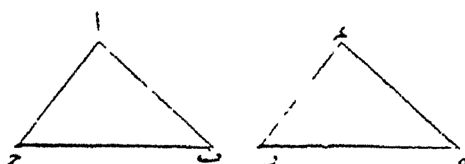
برهان فرض میکنیم ه ر بر استقامت ه ج باشد آنوقت بنا بر ق ۴ ج ه ا = ب ه ر



وبنا بر فرض ب ه د = ج ه ا پس ب ه د مساوی میشود با ب ه ر واین محال است

قضیهٔ ششم

هرگاه دو ضلع و زاویه بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو ضلع و زاویه بینهما از مثلث دیگر نظیر بنظیر آن دو مثلث متساوی باشند مثلا زاویه ا = زاویه د و ضلع اب = د ه و ضلع اج = در و میگوئیم مثلث اب ج = د ه ر



برهان بعمل انطباق
ضلع ده را قرار میدهیم
بر اب بطوریکه نقطه د
بر ا واقع شود و نقطه ه بر ب آنوقت زاویه د چون مساویست با زاویه ا ضلع
د و واقع میشود بر استقامت اج و بفرض دو مساویست با اج پس
نقطه و واقع میشود بر ج و ضلع سیم ه و منطبق میشود بر ب ج و بنابراین
مثلث د ه و بر ا ب ج

نتیجه از اینکه دو مثلث سه جزء متساوی باشند زاویه ا = د و ضلع اب =
د ه و ضلع اج = د و استنباط میشود که ۳ جزء دیگر نیز متساوی میشوند
زاویه ب = ه و زاویه ج = و و ضلع ب ج = ه و

قضیهٔ هفتم

هرگاه دو زاویه و ضلع بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو زاویه
و ضلع بینهما از مثلث دیگر نظیر بنظیر آنها و مثلث متساوی هستند
مثلا در شکل سابق ضلع ب ج = ه و و زاویه ب = ه و زاویه ج = و
و گوئیم مثلث د ه و مساویست با مثلث ا ب ج

برهان بعمل انطباق ضلع ه و واقع میشود بر مساوی خود ب ج و نقطه
ه بر ب و نقطه و بر ج و زاویه ه چون مساویست با ب ضلع ه د
واقع میشود بر استقامت ب ا و بنابراین نقطه د واقع میشود بر نقطه
از خط ب ا و همچنین زاویه و چون مساویست با ج خط و د واقع میشود
بر استقامت ج ا و نقطه د بر نقطه از ضلع ج ا پس نقطه د میبایست

بکمر بته واقع شود بر دو خط ب ا و ج ا پس واقع خواهد شد بر فصل مشترک آنها نقطه ا و آنوقت دو مثلث درست منطبق میشوند و متساوی میگردند

نتیجه از اینکه در دو مثلث سه جزو متساوی باشد ضلع ب ج = ه د و زاویه ب = ه و زاویه ج = د چنین استنباط میشود که سه جزو دیگر نیز متساوی میشوند ضلع ا ب = د ه و ا ج = د ر و ا = د

قضیهٔ هشتم

در هر مثلث هر ضلع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر

برهان خط ب ج چون مستقیم است اقصر فاصله باشد ما بین دو نقطهٔ ب و ج نعک پس ب ج اقصر است از مجموع ا ب + ا ج



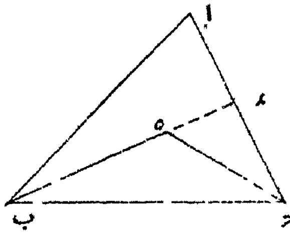
باید نیز دانست که هر ضلع اعظم است از تفاضل دو ضلع دیگر مثلاً ضلع بزرگتر را ا فرض میکنیم و دو ضلع دیگر را ب و ج آنوقت بحکم همین شکل ا < ب + ج و چون ج را از طرفین اسقاط کنیم چنین میشود ا − ج < ب یعنی ب اعظم است از تفاضل ا و ج و چون ب را اسقاط کنیم ا − ب < ج

قضیهٔ نهم

چون از نقطهٔ ه مفروضه در داخل مثلث ا ب ج دو خط ه ب و ه ج و ا بطرفین ضلع ب ج وصل کنیم مجموع این دو خط اقصر است از مجموع دو خط ا ب و ا ج

برهان خط ب ه را امتداد میدهیم تا ا ج را بر نقطهٔ د قطع کند آنوقت بنا بر ق ۸ خط ه ج اقصر است از مجموع ه د + د ج و چون ب ه را بر طرفین

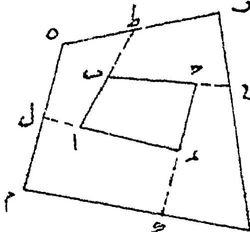
بیفزائیم چنین میشود ب ه + ه ج (ب ه
+ ه د + د ج یا آنکه ب ه + ه ج (ب د
+ د ج و همچنین ب د (ب ا + ا د و چون
د ج را بر طرفین بیفزائیم چنین میشود ب
د + د ج (ب ا + ا ج و چون این را با



مساوات سابق بسنجیم بطریق اولی چنین میشود ب ه + ه ج (ب ا + ا ج

قضیهٔ دهم

محیط هر کثیر الاضلاع محدب مثل ا ب ج د اقصر است از هر نوع خطی مثل م
ب ح که از اطراف بر او احاطه کرده باشد



برهان اضلاع کثیر الاضلاع ا ب ج د را در یکجهة
امتداد دهید تا منتهی شوند بخط محیط آن وقت
این چند نا مساوات نتیجه شود

ا ب + ب ط (ا ل + ل ه + ه ط
ب ج + ج ح (ب ط + ط ر + ر ح
ج د + د ع (ج ح + ح ط + ط ع
د ا + ا ل (د ع + ع م + م ل

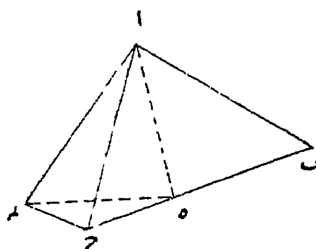
و بعد از جمع آنها و اسقاط مشترکات چنین میشود

ا ب + ب ج + ج د + د ا (ا ه ر + ر ح + ح م + م ه

و بهمین جهة نیز ثابت میشود که محیط هر خط منکسر محدبی اقصر است از خط احاطه کننده
که بطرفین آن منتهی شده باشد

قضیهٔ یازدهم

هرگاه دو ضلع مثلثی مساوی باشد با دو ضلع مثلث دیگر نظیر بنظیر و زاویهٔ حادثهٔ مابین دو ضلع اوّل اعظم باشد از زاویهٔ حادثهٔ مابین دو ضلع دوّم گوئیم که ضلع سیم مثلث اوّل طول است از ضلع سیم مثلث دوّم



برهان دو مثلث را چنان ترتیب میدهیم که ضلع اح در هر دو مشترک باشد و دو ضلع متساوی دیگر اب و اد در طرفین آن افتند و فرض اینست که زاویه باح > حاد

زاویه باد را بخط اه نصف میکنیم این خط واقع شود در زاویه اعظم باح وخط ده را وصل میکنیم آنوقت بنابر ع دو مثلث باه و ه‌اد متساوی میشوند پس به = ده ولی در مثلث ه‌دح ضلع حد < ده + هح وچون در این نامساوات ده را بدل کنیم به به چنین میشود

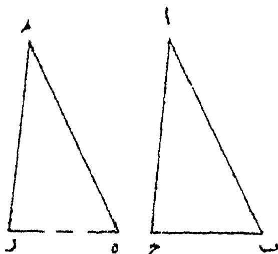
حد < به + هح یعنی حد < بح

و بالعکس اگر دو ضلع اب و اح از مثلث ابح مساوی باشند بدو ضلع اح و اد از مثلث احد وضلع سیم حب از مثلث اول اطول باشد از ضلع سیم حد از مثلث دوّم گوئیم زاویه باح اعظم است از زاویه حاد زیرا که اگر این زاویه کوچکتر میبود از حاد لازم می‌آمد که حب اقصر باشد از حد واین خلاف فرض است واگر مساوی میبود با حاد آنوقت بنابر ع حب مساوی میشد با حد واینحکم نیز خلاف فرض است

قضیهٔ دوازدهم

هرگاه سه ضلع مثلثی مساوی باشند با سه ضلع مثلث دیگر نظیر بنظیر آن دو مثلث متساوی هستند

مثلا ضلع اب = ده و اج = دز و بج = هز و میگوئیم زاویهٔ ا = د و ب = ه و ج = ز



برهان اگر زاویهٔ ا مثلا بزرگتر بود از زاویهٔ د چون دو ضلع اب و اج مساوی هستند با دو ضلع ده و دز نظیر بنظیر پس بحکم قضیهٔ سابقه ضلع بج اطول میشود از هز و اگر زاویهٔ ا را کوچکتر از د فرض کنیم آنوقت لازم می‌آید که ضلع بج اقصر باشد از هز و چون بج مساوی با هز فرض شده زاویهٔ ا نتواند اعظم باشد از د و نه اصغر پس مساوی است و بهمین وجه ثابت میکنیم که زاویهٔ ب = ه و زاویهٔ ج = ز

شرح ملاحظه نمائید که هر دو زاویهٔ متساوی مقابل شده‌اند بدو ضلع متساوی مثلا دو زاویهٔ متساوی ا و د مقابل‌اند بدو ضلع متساوی بج و هز

قضیهٔ سیزدهم

در هر مثلث متساوی الساقین دو زاویه مقابل بدو ضلع [2] [illegible]

برهان [illegible] از راس ا بر نقطهٔ د از وسط قاعده بج [illegible] میکشیم آنوقت در دو مثلث ابد و ادج سه ضلع نظیر بنظیر متساوی‌اند [illegible] اد مشترک است و بفرض اب = اج و بفرض [illegible]

[2] متساوی‌اند مثلا ضلع اب = اج پس زاویهٔ ج مساوی باشد با ب

= ب ح پس بحکم قضیهٔ سابقه زاویهٔ ب مساوی میشود با ح

نتیجه – هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الزوایا نیز باشد

شرح – از تساوی دو مثلث ا ب د و ا ح د لازم آمد که زاویهٔ ب ا د = د ا ح و ب د ا = ا د ح پس این دو زاویهٔ اخیر قائمه اند و بنابراین خط مرسوم از راس مثلث مساوی الساقین بر وسط قاعده عمود است بر این قاعده و زاویهٔ راس را نصف میکند

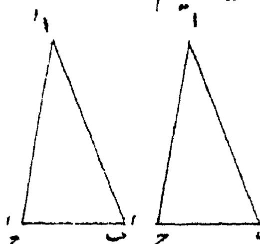
در مثلث غیر متساوی الساقین هر ضلع را میتوان قاعده فرض نمود و آنوقت راسش زاویه است که مقابل باشد بان ضلع ولی در مثلث متساوی الساقین قاعده مخصوصا ضلع سیم است غیر از دو ساق متساوی

قضیهٔ چهاردهم

هرگاه در مثلثی دو زاویه متساوی باشند ضلعین مقابل بان دو زاویه متساوی هستند

مثلا فرض میکنیم زاویهٔ ا ب ح = ا ح ب و میگوئیم ا ح = ا ب

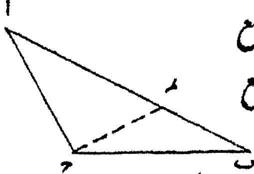
برهان – مثلث ا′ ب′ ح′ را مساوی با مثلث ا ب ح رسم میکنیم چنانچه زاویهٔ ب′ = ب و ح′ = ح و ضلع ب′ ح′ = ب ح و آنرا معکوسا منطبق میکنیم بر ا ب ح بر وجهیکه ضلع ح′ ب′ واقع شود بر ب ح یعنی ح′ بر ب و نقطهٔ ب′ بر ح



و چون زاویهٔ ح′ = ح = ب ضلع ح′ ا′ واقع میشود بر استقامت ب ا و نقطهٔ ا′ بر ا و نتیجه میشود ا′ ب′ = ا ح و بنابراین ا ب = ا ح

قضیهٔ پانزدهم

از دو ضلع هر مثلث اطول آنست که مقابل باشد بزاویهٔ اعظم
و بالعکس از دو زاویهٔ مثلث اعظم آنست که موتر باشد بضلع اطول



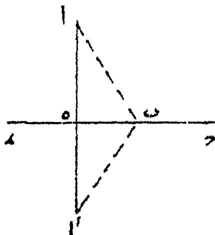
اوّل فرض میکنیم زاویهٔ ج > ب و میگوئیم ضلع
اب مقابل بزاویهٔ ج اطول است از ضلع
اج مقابل بزاویهٔ ب

برهان زاویهٔ ب ج د را مساوی ب جدا کنید آنوقت در مثلث ب د ج و ۱۴
ضلع ب د = د ج ولی ضلع اج اقصر است از اد + د ج و این مجموع
مساویست با اد + د ب = اب پس اب اطول است از اج
ثانیاً فرض میکنیم ضلع اب > اج و میگوئیم زاویهٔ ج مقابله بضلع اب
اعظم است از زاویهٔ ب مقابله بضلع اج زیرا که اگر فرض کنیم ج < ب پس
بحکم مذکور اب < اج و این خلاف فرض است پس لابد زاویهٔ ج باید اعظم باشد از ب

۲ ...ر فرض کنیم ج = ب
...م و۴ اب = اج
...ن نیز خلاف فرض است

قضیهٔ شانزدهم

از نقطهٔ مفروضهٔ خارج خطی میتوان یک عمود بر آن خط فرود آورد نه بیش

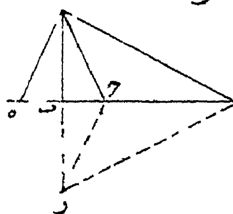


اوّلاً ا نقطهٔ مفروضه است و ج د خط مفروض
پس جزء اعلای سطح را حول ج د حرکت میدهیم تا جزء
اسفل منطبق شود و ا' اثر نقطهٔ ا باشد در آنجا و ا ا' را
وصل میکنیم آنوقت اگر جزء اسفل ا' ج د را حول ج د
بعکس حرکت دهیم تا نقطهٔ ا' بمقام اول خود معاودت کند خط ا' ه درست منطبق
شود بر ا ه و زاویهٔ ا' ه ج درست بپوشاند زاویهٔ ا ه ج را و چون این دو زاویه

مجاوره اند زاویه ا ه ح قائمه است پس ا ه عمود باشد بر ح د
ثانیاً فرض میکنیم که از نقطه ا بتوان دو عمود ا ه و ا ب را بر ح د اخراج
نمود پس یکی از آن دو عمود مثلاً ا ه را امتداد میدهیم انقدر که ه ا' مساوی شود
با ا ه و خط ا' ب را وصل میکنیم آنوقت مثلث ا ه ب مساوی میشود با ا' ه ب
چونکه دو زاویه ا ه ب و ا' ه ب قائمه اند و ضلع ا ه = ا' ه و ضلع ب ه مشترک
است پس زاویه ا ب ه مساوی میشود با ه ب ا' و چون زاویه ا ب ه قائمه است
ه ب ا' نیز قائمه میشود و درانصورت چون مجموع دو زاویه مجاوره ا ب ه و ه ب ا'
دو قائمه شد باید خط ا ب ا' مستقیم باشد و آنوقت لازم اید که بتوان مابین دو نقطه
ا و ا' را بدو خط مستقیم وصل نمود

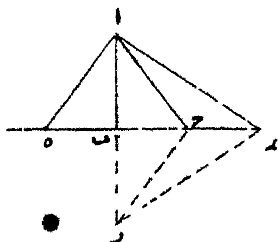
قضیهٔ نهم

چون از نقطهٔ ا واقعه در خارج خط د ه عمود ا ب را بر آنخط فرود آوریم
و خطوط مایله ا ه و ا ح و ا د و غیره را بر نقاط مختلفهٔ آنخط وصل کنیم
اولاً عمود ا ب اقصر است از هر خط مایلی و ثانیاً هر دو مایل متساوی البعد از
موقع عمود مثل ا ح و ا ه که بدو بعد متساوی ب ح و ب ه در فهم
واقع شده اند متساوی هستند و ثالثاً از هر دو خط مائلی مثل ا ح و
ا د یا ا ه و ا د انکه از موقع عمود ابعد باشد اطول است



برهان عمود ا ب را باندازه خود تا نقطه ر امتداد
میدهیم و دو خط ر ح و ر د را وصل میکنیم
آنوقت مثلث ب ح ر مساوی شود با ب ح ا
چونکه دو زاویه ح ب ر و ح ب ا قائمه اند و ضلع

وضلع ح ب مشترک است وضلع ب د = ب ا پس و ع ضلع سیم ح د
مساوی شود با ضلع سیم ا ح وچون خط مستقیم ا ب د اقصر است از منکسر
ا ح د پس ا ب نصف ا ب د اقصر میشود از
ا ح نصف ا ح د یعنی عمود اقصر است از
هر خط مایلی

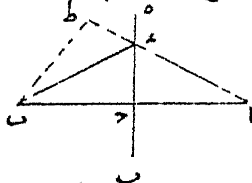


ثانیاً چون ب ه را مساوی ب ح
فرض کنیم و ا ب مشترک است و زاویه
ا ب ه = ا ب ح مثلث ا ب ه مساوی میشود با مثلث ا ب ح و ع د
دو ضلع ا ه و ا ح متساوی کردند یعنی دو مایل متساوی البعد از موقع عمود متساوی باشند
ثالثاً در مثلث د ا مجموع دو خط ا ح و ح د اقصر است از مجموع دو ضلع
ا د و د د و ۹ و بنابراین ا ح نصف ا ح د اقصر میشود از ا د نصف ا د د
یعنی از دو خط مایل هر کدام ابعد باشد از موقع عمود اطول است

نتیجه ۱ – فاصله حقیقی نقطه از خطی بطول عمود مشخص شود چونکه عمود اقصر است از سایر ابعاد
نتیجه ۲ – از نقطه مفروضه میتوان سه خط متساوی بخطی وصل نمود والا لازم آید
در یک سمت عمود دو مایل متساوی واقع شود

قضیه هیجدهم

چون از نقطه ح واقعه بر وسط خط ا ب عمود ه د و ابرا نخط اخراج
کنیم گوئیم اولاً هر نقطه از این عمود متساوی
البعد است از طرفین ا ب و ثانیاً هر نقطه
واقعه در خارج عمود غیر متساوی البعد



ازنهان دو طرف

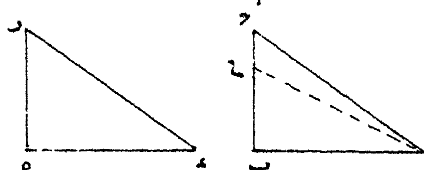
برهان — اولاً چون اج = جب دو مایل اد و دب متساوی البعد میشوند
از موقع عمود و بنابراین متساوی باشند و همچنین دو مایل اه و هب و دو مایل
از و زب پس معلوم شد که هر نقطهٔ از عمود متساوی البعدات از طرفین اب
ثانیاً — ط نقطه‌ایست خارج عمود و دو خط طا و طب را وصل میکنیم پس یکی
از این دو خط عمود را بر نقطهٔ د قطع میکند خط دب را نیز وصل میکنیم آنوقت دب
= دا ولی طب اقصر است از مجموع طد + دب = طد + دا = طا پس طب
< طا یعنی هر نقطه که در خارج عمود فرض شود غیر متساوی البعد است از طرفین

تبیینه — هر خط که نقاطش دارای خاصیت مشترکه باشد دون نقاط خارج آن خط
آن را مکان هندسی گوئیم مثل خط هز که مکان هندسی نقاط متساوی البعدات از دو نقطه ا و ب

قضیهٔ نوزدهم

هرگاه در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یک ضلع متساوی باشد آن
دو مثلث متساوی هستند

مثلاً وتر اج = دز و ضلع اب = ده پس گوئیم مثلث ابج مساوی است با دهز

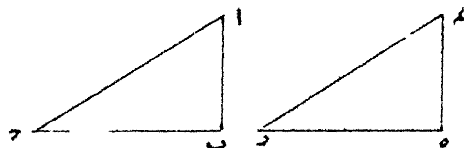


برهان — در این دو مثلث اگر
ضلع سیم بج مساوی بود
با هز حکم ثابت میشد حال فرض
میکنیم متساوی نباشند و بج بزرگتر باشد از نظیر خود پس بح را مساوی هز
جدا میکنیم و اح را وصل مینمائیم آنوقت مثلث ابح مساوی میشود با دهز
چونکه دو زاویهٔ ب و ه قائمه اند و متساوی و ضلع اب = ده و ضلع بح

= ه د پس اح = ه د ولی بفرض ه د مساوی است با اد پس اح = اد
و این تساوی صحیح نباشد چونکه مایل اد ابعد است از موازی عمود و ۱۱ پس د ح
اختلاف نداشته باشد با ه د و مثلث ا ب ح مساوی باشد با ه د

قضیهٔ بیستم

در دو مثلث قائم الزاویه هرگاه وتر و زاویه متساوی باشند ان دو مثلث متساوی هستند



مثلاً اح = ه د و زاویه ا = ه
پس بدلیل انطباق ه د ر نقل میکنیم بر اب ح بر وجهیکه ه د واقع شود بر اح آنوقت زاویه ه چون مساویست با ا ضلع ه ه واقع میشود بر استقامت اب و درانصورت ر ه واقع خواهد شد بر استقامت ح ب والا لازم آید که از ح بتوان دو عمود بر اب فرود آورد پس نقطه ه منطبق میشود بر ب و دو مثلث متساوی میگردند

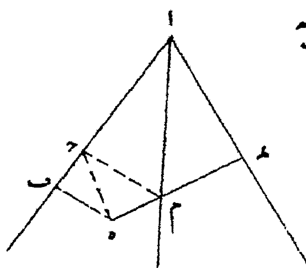
قضیهٔ بیست و یکم

اولاً هر نقطه مثل م که فرض شود بر خط منصف الزاویه ب اد متساوی البعد است از ضلعین انزاویه وثانیاً هر نقطه مثل ه که در خارج انخط فرض شود غیر متساوی البعد است از همان دو ضلع

برهان ـ اولاً از نقطه م واقعه بر منصف الزاویه ب اد دو عمود م د و م ح را بر اد و اب فرود آورید تا دو مثلث قائم الزاویه م اد و م اح متساوی گردند چونکه وتر م ا در هر دو مشترک است و دو زاویه م اد و م اح متساوی

پس م د = م ح

ثانیاً از نقطه ه واقعه در خارج منصف الزاویه دو عمود هد و هب را بر اد و اب فرود آورید و از نقطه م آنجا که خط ه د منصف الزاویه را قطع میکند عمود مج را بر اب فرود آورید و هج را وصل کنید آنوقت

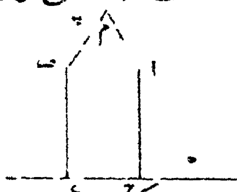


در مثلث جهم ضلع جه < مج + مه و چون مج = مد پس جه < هد و به < جه پس به < هد

شرح خط منصف الزاویه مکان هندسی نقاطی است که متساوی البعد باشند از ضلعین آن زاویه

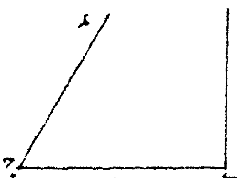
قضیهٔ بیست و دوم

هرگاه دو خط اد و بد عمود باشند بر خط ثالث جد پس متوازی هستند



چونکه اگر متلاقی میشدند مثلاً بر نقطه م آن وقت لازم می آید که از آن نقطه دو عمود بر جد فرود آمده باشند

حکم - اگر یکی از دو خط اب و دج عمود باشند بر جب و دیگری مایل پس بعد از امتداد متلاقی میشوند

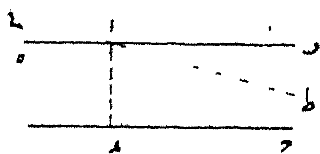


اینحکم ظاهر است و محتاج بدلیل نیست

قضیهٔ بیست و سیم

بر نقطهٔ میتوان خطی بموازات خط دیگر مرور داد و بیش از یک موازی ممکن نیست

برهان - از نقطه ا عمود اه را بر هج فرود آورید و از همان نقطه ا د را عمود کنید بر اه پس دو خط اد و هج متوازی میشوند

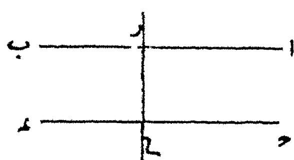


(ف ۲۲) حال میگوئیم که غیر از خط اد هر خطی مثل اط که برا مرور کند دیگر موازی نیست با هج چونکه هج عمود است بر اه و اط مایل است نسبت بآن

قضیه بیست و چهارم

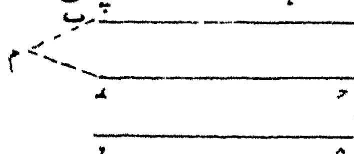
هرگاه دو خط جد و اب متوازی باشند و خط رح عمود شود بر یکی از آن دو مثلاً بر اب پس عمود باشد بر خط دیگر جد

برهان اولاً ظاهر است که رح باید تلاقی نماید جد را والا لازم آید که بر نقطه ر دو خط مرور نموده باشد موازات جد و بعد از وقوع ملاقات گوئیم عمود شود بر جد والا جد مایل باشد بر رح و اب عمود است بر آن و در اینصورت متلاقی میشوند و این خلاف فرض است



قضیه بیست و پنجم

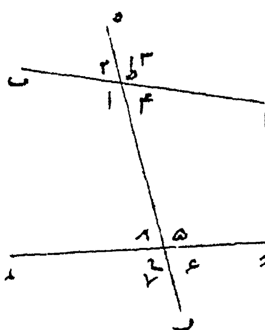
هرگاه دو خط اب و جد متوازی باشند با خط ثالث هد پس متوازی هستند نسبت بهمدیگر



چونکه اگر این دو خط اب و جد متلاقی کردند بر نقطه مثل م آنوقت لازم آید که ه

که ازاین نقطه بتوان دو خط بموازات ه د رسم نمود

حدود



هرگاه دو خط ا ب و حد را خط ثالث ه د قطع کند هشت زاویه حول دو نقطه فصل مشترک ط و ح احداث شود

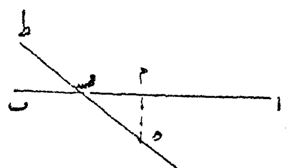
چهار زاویه ۱ و ۴ و ۵ و ۸ واقعه مابین دو خط ا ب و حد را زوایای داخله گوئیم و چهار زاویه دیگر را خارجه

و دو زاویه داخله ۱ و ۵ را که طرفین قاطع واقع شده اند و غیر مجاوره اند متبادله داخله گوئیم و دو زاویه داخله و خارجه ۸ و ۲ را که در یکسمت قاطع واقع شده اند و غیر مجاوره اند متقابله گوئیم

و دو زاویه خارجه غیر مجاوره ۲ و ۶ را که در طرفین قاطع واقع شده اند متبادله خارجه

قضیهٔ بیست و ششم

چون دو خط متوازی را خط ثالثی قطع کند گوئیم اولاً دو زاویه متبادله داخله متساوی باشند و ثانیاً دو زاویه متبادله خارجه متساوی باشند و ثالثاً دو زاویه خارجه و داخله متقابله متساوی باشند و رابعاً دو زاویه داخله واقعه در یک سمت قاطع مجموعشان مساوی با دو قائمه



برهان دو متوازی ا ب است و حد و ... قاطع ط ح پس از نقطه ه وسط ... عمود ه م را بر ا ب فرود می آوریم آنخط عمود می‌شود

ه م = ب ح د و دو مثلث قائم الزاویه م ه د و ه ن ے متساوی میشوند چونکه بفرض د و وتر ه د و ه ے متساوی هستند و دو زاویه م ه د و ے ه ن نیز متساوی و ازتساوی این دو مثلث دو زاویه متبادله داخله م د ه و ه ے ن متساوی شوند

و نیز بهما نواسطه دو زاویه ب د ے و د ے ح که تمام دو زاویه م د ه و ه ے ن اند فائده متساوی اند

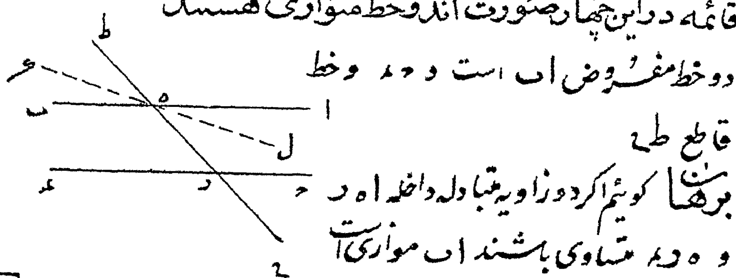
ثانیاً دو زاویه متبادله خارجه ط د ب و ح ے ح متساوی هستند چونکه متقابله بالراس اند با دو زاویه متبادله داخله م د ه و ه ے ن

ثالثاً دو زاویه متقابله ط د ب و د ے د متساوی هستند چونکه ط د ب = ا د ے و ا د ے = ط ے د

رابعاً مجموع دو زاویه ب د ے و د ے د مساوی است با دو قائمه چونکه ب د ے + ا د ے = ۲ قائمه و ا د ے = د ے د

قضیه بیست و هفتم

هرگاه دو خط را خط ثالثی قطع کند بر وجهی که دو زاویه متبادله داخله متساوی شوند یا دو زاویه متبادله خارجه یا دو زاویه خارجه و داخله متقابله و یا مجموع دو زاویه داخله حادثه در یک سمت قاطع مساوی شود با دو قائمه در این چهار صورت اند و خط متوازی هستند



دو خط مفروض ا ب است و ح د و خط قاطع ط ح

برهان گوئیم اگر دو زاویه متبادله داخله ا ه د و ه د د متساوی باشند ا ب موازی است

باجد والّا برنقطه ه خط ه ل را موازات جد رسم میکنیم انوقت دو زاویه ل ه د و ه د د چون متبادله داخله اند متساوی باشند و بنا برفرض اه د مساوی بود با ه د د پس اه د مساوی میشود با ل ه د و این محال است

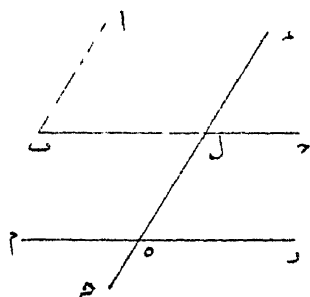
ثانیاً اگر دو زاویهٔ متبادله خارجه ط ه ب و ح د ح متساوی باشند دو زاویه اه د و ه د د مقابله رأس با آن دو زاویه متساوی میشوند وانوقت بنا برحکم اول اب موازی میشود با جد

ثالثاً اگر دو زاویه خارجه و داخله متقابله ط ه ب و ه د د متساوی باشند وچون ط ه ب مساویست با اه د پس اه د مساوی شود با ه د د وبحکم اول اب موازی شود با جد

رابعاً اگر مجموع دو زاویه ب ه د و ه د د مساوی باشد با دو قائمه وچون ب ه د + اه د = ۲ق پس اه د = ه د د واب موازی شود با جد

قضیهٔ بیست و ششم

هرگاه اضلاع دو زاویه متوازی باشند پس آن دو زاویه متساوی هستند یا تمام همدیگر اند تا دو قائمه

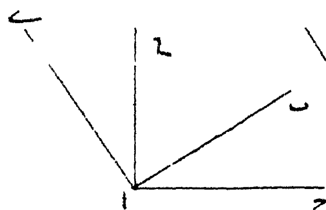


دو زاویهٔ مفروضه اب ح است و ه د د که اضلاعشان متوازی هستند و ممتد در یکجهه پس گوئیم این دو زاویه متساوی هستند زیرا که دو زاویه ه ل ح و ه د د چون متقابله اند متساوی باشند و همچنین ه ل ح = اب ح پس اب ح = ه د د

ثانیاً دو زاویه مفروضه ا ب ج است و د ه م که اضلاعشان متوازی باشند ولی دو ضلع ب ا و ه د در یکجهة ممتد اند و دو ضلع ب ج و ه م در دو جهة مخالف گوئیم تمام همدیگر اند تا دو قائمه زیرا که د ه م تمام د ه ق است و د ه ق مساوی ا ب ج

قضیهٔ بیست و نهم

هرگاه اضلاع دو زاویه عمود باشند بر همدیگر اند و زاویه متساوی هستند یا تمام همدیگر

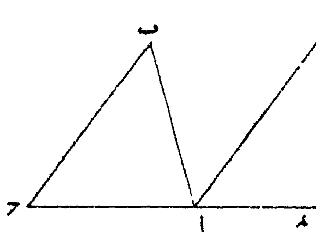


دو زاویه که اضلاعشان عمود باشند بر همدیگر ب ا ج است و د ه ق پس از نقطه ا خط آ را عمود میکنیم بر ا ب و خط ا ح را بر ا ج آن وقت این دو خط متوازی میشوند با د ه و ه ق و همه ممتد اند در یکجهة پس زاویه ح ا ح = د ه ق ولی ح ا ح + ح ا ب = آ و ب ا ج + ح ا ب = آ پس ح ا ح = ب ا ج

شرح - هرگاه بجای د ه ق زاویه ق ه ط را اختیار کنیم که حادث شده است مابین ه ق و استقامت د ه ظاهر است که این زاویه تمام ب ا ج است تا دو قائمه

قضیهٔ سی ام

مجموع زوایای هر مثلث مساویست بدو قائمه



برهان ا ه را بموازات ب ج رسم کنید و ج ا را امتداد دهید آن وقت دو زاویه ا ج ب و ه ا د چون نسبت بدو متوازی ب ج و ه ا و بخط قاطع

اح مقابله اند متساوی باشند و دو زاویه حب ا و ب اه چون متبادله واقع نسبت بهمان دو متوازی و بقاطع اب متساوی هستند پس مجموع زوایای مثلث مساوی شد بمجموع سه زاویه حاب و ب اه و ه ام حادثه حول نقطه ا و در یک سمت حد و جمع ثانی مساویست با دو قائمه پس جمع اول نیز دو قائمه است

نتیجه ۱ در هر مثلث ممکن نیست بیش از یک زاویه قائمه موجود شود و بدلیل اقوی بیش از یک زاویه منفرجه

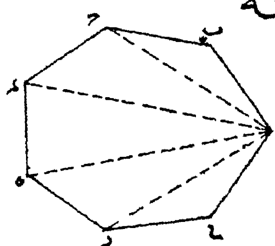
۲ ــ در مثلث قائم الزاویه مجموع دو زاویه حاده مساویست بیک قائمه

۳ ــ در مثلث هرگاه مجموع دو زاویه معلوم باشد اگر از دو قائمه تفریق کنیم باقی زاویه سیم است

۴ ــ در مثلث اب ح زاویه خارجه ب اه حادثه ما بین ضلع ب ا و استقامت اح مساویست بمجموع دو زاویه داخله حب ا و ب ح ا

قضیهٔ سی و یکم

مجموع زوایای داخله هر کثیر الاضلاع محدب مساویست بعدد اضلاعش منهای دو ضرب بدو قائمه



برهان ــ بر یکی از رؤس مثلا برا اقطاری میگذرانیم که منتهی شوند بجمیع رؤس غیر مجاوره تا کثیر الاضلاع بمثلثات قسمت شود و عدد این مثلثات برابر است با عدد اضلاع منهای دو زیرا که چون نقطه ا را رأس مشترک جمیع قرار دهیم قاعدهٔ هرکدام ضلعی میشود از کثیر الاضلاع غیر از دو مثلث طرفین که هرکدام صاحب دو ضلع میشوند و مجموع زوایای این مثلثات مساویست بمجموع زوایای کثیر الاضلاع و اینحاصل جمع بعدد مثلثات مرکب از

دو قائمه است یعنی دو واحد کمتر از عدد اضلاع شامل دو قائمه است پس اگر عدد اضلاع را ع فرض کنیم مجموع زوایای کثیر الاضلاع بحسب قائمه چنین میشود

۲ع-۴ یا ۲×(ع-۲)

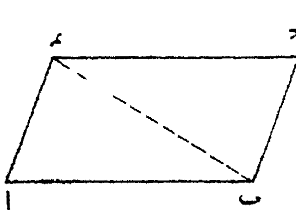
قضیهٔ سی و دوم

چون جمیع اضلاع کثیر الاضلاع محدبی را بیک جهة امتداد دهیم مجموع زوایای خارجه که حادث شود مساویست با چهار قائمه

برهان هر زاویهٔ داخله باضافهٔ خارجه مجاورهٔ آن مساویست با دو قائمه پس مجموع زوایای داخله و خارجه کثیر الاضلاع مساویست با ۲ع قائمه (ع عدد اضلاع است) و چون مجموع زوایای داخله مساوی شد با (۲ع-۴) قائمه پس مجموع زوایای خارجه بقدر فضل جمع اولست بر ثانی یعنی ۴ قائمه

قضیهٔ سی و سیم

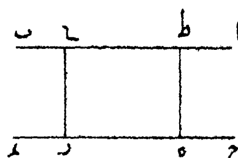
در شکل متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل متساوی باشند و همچنین هر دو زاویهٔ مقابله



برهان - قطر ب د را وصل کنید آنوقت در دو مثلث ا د ب و د ب ح ضلع ب د مشترک است و نسبت بدو خط متوازی ا د و ب ح زاویه ا د ب = د ب ح و (۲۶) و نسبت بدو خط متوازی ا ب و ح د زاویه ا ب د = ب د ح

پس ﴿۲﴾ این دو مثلث متساوی باشند و ضلع اب مقابل بزاویه ادب مساوی میشود با ضلع دج مقابل بزاویه دبج و همچنین ضلع سیم اد مساوی میشود با ضلع بج یعنی که هر دو ضلع متقابل متساوی باشند ثانیاً از تساوی همه مثلث زاویه ا مساوی میشود بزاویه ج و زاویه ادج مرکبه از دو زاویه ادب دبج = زاویه ابج مرکبه از دو زاویه دبج + ابد یعنی که دو زاویه متقابله متساوی باشند

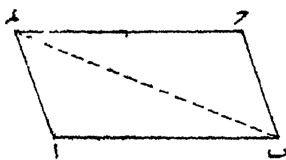
نتیجه ۱ـ هر دو خط متوازی مثل اب و جد که واقع باشند مابین دو متوازی دیگر اد و بج متساوی باشند



نتیجه ۲ـ فاصله دو خط متوازی همه جا یکی است زیرا که چون از دو نقطه ط ح از موازی اب دو عمود ط‌ه ح‌ز را اخراج کنیم این دو خط متوازی میشوند و تساوی چون واقع شده اند مابین دو متوازی

قضیه سی و چهارم

هرگاه در ذی اربعه اضلاع ابجد هر دو ضلع متقابل متساوی باشند اب = جد و اد = بج گوئیم اضلاع متساوی نیز متوازی هستند و شکل متوازی الاضلاع است



برهان قطر بد را وصل میکنیم و دو مثلث ابد و بدج چون اضلاعشان نظیر بنظیر متساوی باشند و زاویه ادب مقابله بضلع اب مساوی است با زاویه دبج مقابله بضلع جد پس ﴿۲۷﴾

ضلع اد موازیست با ب ج و بهمان دلیل اب موازیست با جد پس شکل ابجد
متوازی الاضلاع است

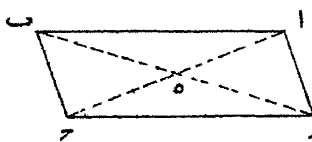
قضیهٔ سی و پنجم ۳۵

هرگاه در ذوار بعة الاضلاعی (شکل سابق) دو ضلع مقابل اب و جد
متساوی و متوازی باشند پس دو ضلع دیگر نیز متساوی و متوازی هستند
و شکل ابجد متوازی الاضلاع است

برهان قطر بد را وصل کنید آنوقت چون اب موازی است با جد دو زاویه
متبادله داخله ابد و بدج متساوی است و ۲۶ و بفرض اب = جد و
ضلع بد مشترک پس مثلث ابد مساویست با بدج و ۶ع پس ضلع
اد = بج و زاویه ادب = دبج و بنا براین اد موازیست با بج
و شکل ابجد متوازی الاضلاع است

قضیهٔ سی و ششم ۳۶

دو قطر اج و بد از متوازی الاضلاع ابجد منصف همدیگر اند
بر نقطه تقاطع ه



برهان در مقایسه دو مثلث اده و جهب ضلع
اد = جب و زاویه اده = جبه و ۲۶ و زاویه
داه = هجب پس این دو مثلث متساوی باشند و ضلع اه مقابل بزاویه اده = هج و ضلع
ده مقابل بزاویه هاد = هب

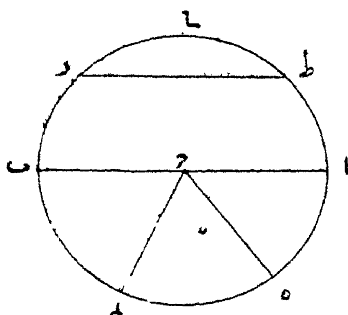
شرح ـ در شکل معین دو ضلع اب و بج متساوی باشند و دو مثلث اهب و هبج
چون اضلاعشان نظیر بنظیر متساوی باشند متساویند و بنا براین زاویه اهب

= ب ه ج یعنی که در معین و قطر بزوایای قائمه متقاطع شوند

مقالهٔ سیم

حدود

۱ - محیط دایره خطی است منحنی که جمیع نقاطش بیک فاصله باشند از نقطه داخله که موسوم است بمرکز و سطح دایره وسعی است محدود و محصور بان خط منحنی وکلمه دایره را هم بر محیط اطلاق کنیم و هم بر سطح ولی از سیاق کلام مقصود معلوم شود و در معنی اختلاف کلی است



۲ - هر کدام از خطوط ج ا و ج ه و ج ز وغیره واصله ما بین مرکز و نقطه از محیط را نصف قطر و شعاع گوئیم و خط ا ب راکه بمرکز گذشته و از طرفین بمحیط منتهی گشته است قطر گوئیم

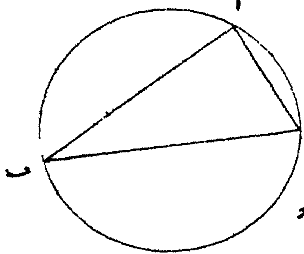
و بنا بر تعریف دایره جمیع اشعه متساوی باشند و همچنین جمیع اقطار و هر قطر مضاعف شعاعی باشد

۳ - قوس دایره قطعهٔ ایست از محیطش مثل د ح ط و وتر خطی است مثل د ط واصل ما بین طرفین قوس

۴ - قطعهٔ دایره جزئی است از سطحش محصور ما بین قوس و وتر و وتر د ط همواره

مقابل است بدو قوس ب ج ط و د ه ط و بنابراین بدو قطعه ولی مقصود قطعه کوچکتر است مگر آنکه قید شود

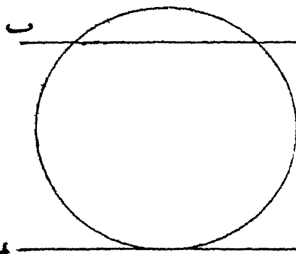
۵ ـ قطاع دایره جزئی است از آن محصور مابین قوس ب ه و دو نصف قطر ج ب و ج ه



۶ ـ خط محاط در دایره آنستکه طرفینش منتهی باشد بمحیط مثل خط ا ب

زاویه محاطیه آنستکه راسش واقع باشد بر محیط و حادث باشد مابین دو وتر مثل زاویه ب ا ح

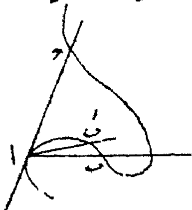
مثلث محاطی آنستکه رؤسش واقع باشد بر محیط مثل مثلث ب ا ح و بطور کلی شکل محاطی آنست که رؤس جمیع زوایایش واقع باشد بر محیط و درانصورت دایره را نسبت بآن محیطه گوئیم

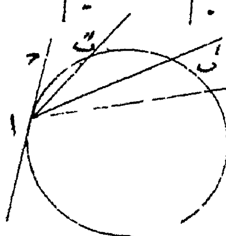


۷ ـ قاطع خطی است که محیط را بر دو نقطه قطع کند مثل خط ا ب

۸ ـ خط مماس آنست که با دایره در یک نقطه مشترک باشند نه بیش مثل خط ح ه و نقطه مشترکه م را نقطه مماس گوئیم

۹ و همچنین دو دایره را نسبت بهم مماس گوئیم هرگاه مشترک باشند در یک نقطه نه بیش





شرح ـ بطور کلی مماس بر منحنی حد اوضاع قاطع است بنابرآنکه حول نقطه منحنی ا القدر دوران کند که نقطه مقطع دیگر

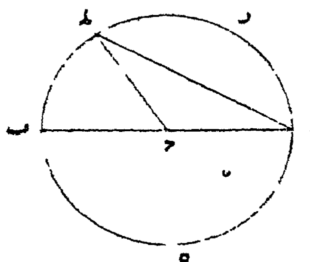
باید بر نقطهٔ اول منطبق شود پس اگر منحنی ممدود باشد و قاطع بیش از دو نقطه با او ملاقات نکند مثل دایره ظاهر است که چون آن دو نقطهٔ فصل مشترک در یک نقطه جمع شوند آن خط قاطع با منحنی در نقطهٔ بیش مشترک نباشند و آنوقت میتوان گفت که مماس خطی است که بر بیشتر از یک نقطه با منحنی مشترک نباشد ولی تعریف او بر جمیع انواع خطوط منحنیه تعلق نگیرد

۱۰- کثیر الاضلاع را محیط بر دایره گوئیم هرگاه جمیع اضلاعش دایره را مماس کنند و در چنین حالت دایره را نسبت بآن محاطیه گوئیم

قضیهٔ اول

در دایره هر قطر مثل اب سطح و محیطش را نصف کند

برهان - چون بدلیل انطباق بر قاعدهٔ مشترکه اب شکل اهب را قرار دهیم بر ادب خط منحنی اهب درست منطبق خواهد شد بر ادب والا لازم آید که بعضی نقاط محیط مختلفة البعد باشند از مرکز و این خلاف تعریف دایره است



قضیهٔ دوم

در دایره هر وتر اقصر است از قطر

برهان چون در شکل سابق دو شعاع حا و حد را بر طرفین وتر اد وصل کنیم خط اد $< اح + حد$ یعنی $اد < اب$

فنتیجه - اطول خطی که میتوان در دایره محاط نمود قطر است

قضیه سیم

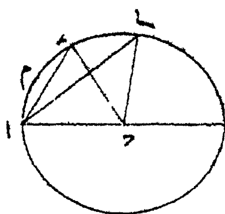
هیچ خط دایره را بیش از دو نقطه قطع نکند

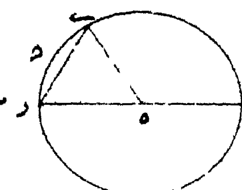
زیرا که اگر مثلاً بر سه نقطه او را قطع میکرد این هر سه بیک فاصله بودند از مرکز او پس لازم می آید که توانیم از نقطه سه خط متساوی بخطی وصل کنیم و این خلاف (علامت قضیه ۱۲ مقاله اولست)

قضیه چهارم

در یکدایره یا در دو دایره متساویه قسی متساویه موتر باشند باوتار متساویه وبالعکس اوتار متساویه وتر باشند بقسی متساویه

مثلاً شعاع اد مساویست بشعاع هر و قوس ام د = رن ـ میکوئیم وتر ا د = رب





برهان ـ چون قطر اب = رط نصف دایره ا م د ب منطبق شود درست بر نصف دایره ر ن ـ ط ومنحنی ام د ب باتمام منطبق شود بر منحنی رن ـ ط وچون قوس ام د را مساوی رن ـ فرض نموده ایم نقطه د واقع میشود بر ـ و وتر ا د مساوی میشود با رب

حال فرض میکنیم وتر اد = رب ومیکوئیم قوس ام د = ره ـ

برهان چون دو شعاع ح د و ه ـ وصل کنیم دو مثلث ا ح د و ر ه ـ اضلاع نظیر بنظیر متساوی میشوند اح = ره و ح د = ه ـ و اد = رـ وبنابراین دو مثلث متساوی باشند و (۱۲) پس زاویه اح د = ر ه ـ وچون نصف دایره

ا ه ب را برمساوی خود ه ط قرار دهیم نظر بتساوی دو زاویه مذکوره شعاع ج ه واقع شود بر ه ب و نقطه ه بر ب پس قوس ا م ه مساوی شود با د ن ب

قضیهٔ پنجم

در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه هر قوس که اعظم باشد موترا ست بوتر اطول و بالعکس و تر اطول مقابل باشد بقوس اعظم مشروط بر آنکه قوسهای مفروض کوچکتر باشند از نصف محیط

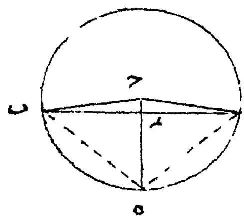
برهان در شکل سابق قوس اب بزرگتر است از د ن ب و قوس ا م ه را مساوی د ن ب جدا میکنیم و دو شعاع ج ه و ج ب را وصل میکنیم آنوقت دو ضلع اج و ج ب از مثلث ا ج ب مساویست با دو ضلع اج و ج ه از مثلث ا ج ه و زاویه ا ج ب اعظم است از ا ج ه پس ضلع سیم اب اطول باشد از ضلع ا ه یعنی اب > د ب و بالعکس اگر وتر اب اطول باشد از د ب قوس ا م ب بزرگتر است از د ن ب زیرا که اگر بگوئیم متساوی بشد آنوقت وتر اب مساوی میشود با د ب و این خلاف فرض است و اگر بگوئیم کوچکتر است وتر اب کوچکتر میشود

شرح - قسی مفروضه را کوچکتر از نصف محیط گرفتیم پس اگر اعظم باشند حکم برخلاف مذکور است

قضیهٔ ششم

نصف قطر د ه عمود بر وتر اب منصف او تر است و قوس موتر ا ه ب هر دو

برهان دو شعاع ج ا و ج ب را وصل میکنیم و هر دو نسبت بعمود ج ه دو مایل متساویند پس ه ا و ه ب متساوی البعد اند از موقع عمود یعنی ا ه = ه ب

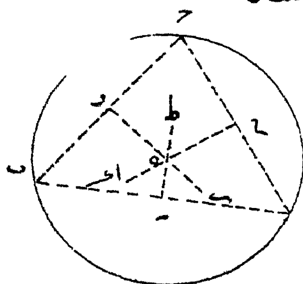


ثانیاً چون اد = دب و ده عمود بیست وارد بروسط اب پس وهر نقطه
ازاین عمود متساوی البعد است از طرفین ا و ب و نقطه ه یکی از این نقاط است پس
فاصله اه = به وچون وتر اه مساوی شد باه ب وقوس اه مساوی میشود
باه ب و غ پس شعاع ده عمود بر وتر اب نصف میکند قوس موتر را بر نقطه ه

شرح- خط ده مرور کرده است بر مرکز و بر وسط وتر و بر وسط قوس و عمود است بر
وتر و چون در تعین وضع خط دو شرط از این شروط چهارگانه کافیست پس هر خطکه
دارای دو شرط باشد دو شرط دیگر را بالتبع داراست
مثلاً عمودیکه اخراج شود بر وسط وتر مرور میکند بر مرکز و بر وسط قوس و همچنین

قضیهٔ هفتم

بر سه نقطه ا و ب و ح غیر واقعه بر یک استقامت همواره میتوان بره
مرور داد و بیش از یک دایره ممکن نباشد



برهان دو خط اب و بح را وصل کنند
و بر وسط آنها دو عمود دط و رح را اخراج
کنند و اول گوئیم این دو خط بر نقطه متلاقی میشوند
زیرا که اگر متوازی میبودند دو خط با و بح
که از نقطه ب عمود شده اند بر آن دو خط متوازی
میبایست بر یک استقامت باشند و این خلاف فرض است

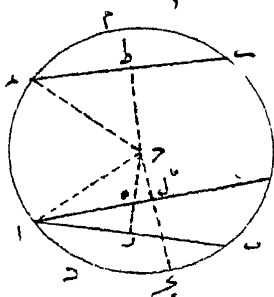
پس نقطه تلاقی ه از آن دو عمود چون متعلق است بعمود دط متساوی البعد باشد
از دو نقطه ا و ب و همان نقطه چون متعلق است بعمود رح متساوی البعد باشد
از دو نقطه ب و ح پس سه فاصله ها و هب و هح متساوی میشوند و بنابراین

دایره که از مرکز ه و بنصف قطر ه ب رسم شود مرور خواهد نمود بر هر سه نقطهٔ ا و ب و ح
حال گوئیم ممکن نیست دایره دیگر بر همان سه نقطه گذر کند زیرا که اگر چنین دایره موجود
بود مرکزش میبایست واقع باشد بر دو خط د ط و د ب و این دو خط بر یک نقطه مشترک
متقاطع نباشند

نتیجه ۱ - عمود و ارد بر وسط اح مرور نماید بر نقطه ه چونکه این نقطه متساوی البعد است
از طرفین اح پس سه عمود وارد بر اوساط اضلاع مثلث بر نقطهٔ متقاطع شوند
۲ - دو دایره اگر بر زیاده از دو نقطه مشارک باشند منطبق خواهند شد

قضیهٔ هشتم

دو وتر متساوی الطول متساوی البعد باشند از مرکز دایره واز
دو وتر مختلف آنکه اقصر باشد بعدش از مرکز بیشتر است



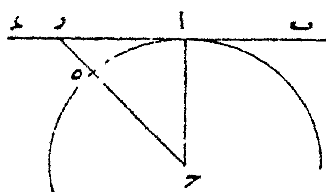
اول فرض میکنیم وتر اب = د ب و بدو عمود
ح د و ح ط آنها را نصف میکنیم و دو شعاع
ح ا و ح د را وصل میکنیم
پس دو مثلث قائم الزاویه ح اد و ح د ط
چون وتر ح ا = ح د و ضلع اد نصف اب
= د ط نصف د ب این دو مثلث متساوی هستند و ازاو ضلع سیم ح د مساوی
میشود با ح ط پس معلوم شد که دو وتر متساوی اب و د ب متساوی البعدند از مرکز
ثانیاً چون وتر اح اطول است از د ب قوس الب ح اعظم است از د م ب
واز قوس الب ح قوس ان ب را مساوی د م ب جدا میکنیم و وتر اب را
وصل میکنیم و عمود ح د را بر آن وتر فرود بیاوریم و عمود ح ل را بر اح حال

ظاهر است که ح د اعظم باشد از ح ه و آن اعظم از ح ل پس بطریق اولی ح د > ح ل
ولی ح د = ح ط چونکه دو وتر ا ب و د ت متساوی هستند پس ح ط > ح ل
یعنی که از دو وتر مختلف الطول آنکه اقصر است ابعد باشد از مرکز دایره

قضیهٔ نهم

عمود ب د مرسوم بر طرف شعاع ح ا مماس شود بر دایره

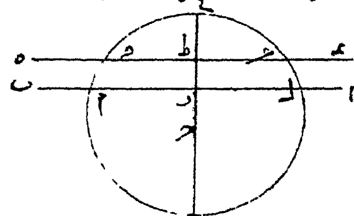
برهان هر مائلی مثل ح د اطول است از عمود ح ا



پس نقطه د خارج دایره افتد و از این قرار خط
ب د بغیر از نقطه ا با دایره اشتراک ندارد
پس مماس دایره است و بالعکس گوئیم
شعاع ح ا واصل بر نقطه مماس عمود باشد بر خط مماس ب د
زیرا که جمیع نقاط این خط غیر از نقطه ا خارج دایره است و بنابراین شعاع ح ا اقصر خطی است
که میتوان از نقطه ح بر خط ب د وصل نمود پس عمود است بر آن خط
نتیجه — بر نقطه ا مفروضه بر محیط نمیتوان بیش از یک خط مماس نمود

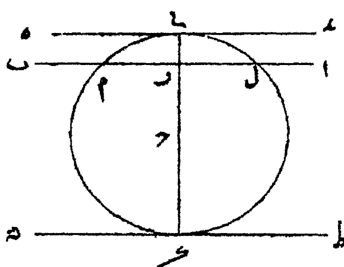
قضیهٔ دهم

دو متوازی ا ب و د ه از محیط دایره دو قوس متساوی م ن و ل ک جدا کنند
این شکل سه حالت دارد اول آنکه دو متوازی قاطع دایره باشند پس شعاع ح ع را



عمود کشیم بر وتر م ل و آن عمود شود نیز بر
موازیش ن ک پس نقطه ع هم بر وسط قوس
م ع ل واقع باشد و هم بر وسط قوس ن
ع ک و ع یعنی م ع = ع ل و قوس

ن ح = ح ك پس م ح - ن ح = ح ل - ح ك يعنى م ن = ل ك

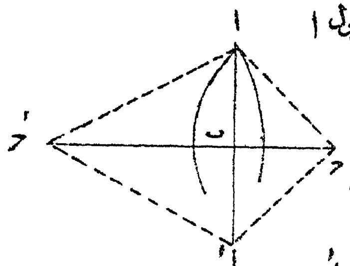


دوم آنكه از دو متوازى اب و ده يكى قاطع باشد و ديگر مماس شعاع ح ح را بر نقطهٔ تماس ح وصل ميكنيم و آن عمود شود بر مماس ده و نيز بر موازيش م ل پس نقطهٔ ح واقع باشد بر وسط قوس م ح ل يعنى دو قوس م ح و ح ل واقع ما بين دو متوازى متساوى باشند

سيم آنكه دو متوازى مماس دايره باشند يكى ده بر نقطهٔ ح و ديگرى طن بر نقطهٔ ك پس خط قاطعى بموازات آنها رسم كنيم مثل اب آنوقت بنا بر آنچه ذكر شده م ح = ح ل و م ك = ك ل پس تمام قوس ح م ك = ح ل ك و بايد ملتفت بود كه هر كدام نصف محيط است

قضيهٔ يازدهم

هرگاه دو دايره مشارك باشند در نقطهٔ ا واقعه در خارج خط ح ح' واصل ما بين مركزين آنها پس مشارك ميشوند در نقطهٔ ديگر ا' واقعه بر عمود اب كه وارد شده باشد بر ح ح' و فاصلهٔ اين نقطهٔ دوم از خط المركزين برابر باشد با فاصلهٔ نقطهٔ اول ا



برهان - ا'ب را مساوى اب جدا ميكنيم پس دو مايل ح ا و ح ا' چون متساوى البعداند از موقع عمود ح ب متساوى باشند پس دايرهٔ مرسومه از مركز ح و بشعاع ح ا مرور كند بر نقطهٔ ا'

وهمچنین دایره مرسومه از مرکز ح' و بشعاع ح' ا مرور کند بر ا'

نتیجه ۱ - دو دایره چون متقاطع شوند خط واصل بین المرکزین عمود باشد بر وسط وتر مشترک

نتیجه ۲ - دو دایره چون مماس بهمدیگر شوند نقطه تماس واقع شود بر خط المرکزین والا لازم آید که دو دایره در نقطه دیگر مشارک باشند و در اینصورت متقاطع میشدند نه مماس

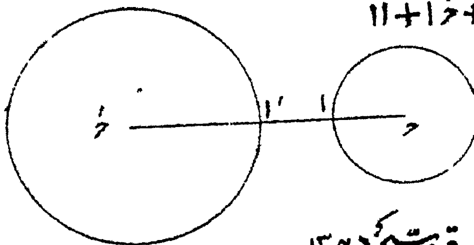
دو دایره را چون نسبت بهمدیگر بسنجیم صاحب پنج وضع مختلف توانند بود متخارج متداخل مماس داخل مماس خارج متقاطع

قضیه دوازدهم

در دو دایره متخارجه بعد المرکزین اعظم است از مجموع دو شعاع

زیرا که چون ح ح' = ح ا + ح' ا' + ا ا'

پس ح ح' > ح ا + ح' ا'

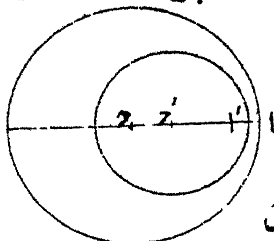


قضیه سیزدهم

در دو دایره متداخله بعد المرکزین اصغر است از مجموع دو شعاع

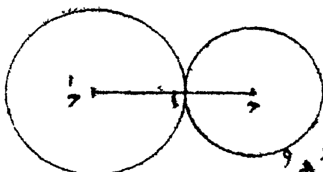
زیرا که چون ح ح' = ح ا - ح' ا' - ا ا' پس

ح ح' < ح ا - ح' ا'



قضیه چهاردهم

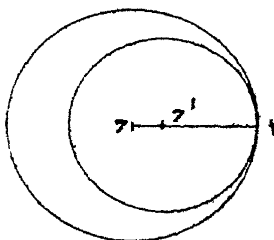
در دو دایره که مماس خارج باشند بهمدیگر بعد المرکزین مساویست بمجموع دو شعاع



زیرا که چون نقطه تماس آ واقع است
بر خط المرکزین
پس ح ح' = ح ا + ا ح'

قضیهٔ پانزدهم

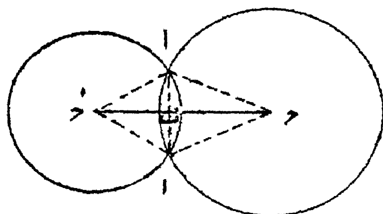
در دو دایره که متماس داخل باشند بر هم دیگر بعد المرکزین مساویست بتفاضل دو شعاع



زیرا که چون نقطه تماس واقع است بر خط المرکزین
پس ح ح' = ح ا − ح' ا

قضیهٔ شانزدهم

در دو دایره متقاطعه بعد المرکزین اصغر است از مجموع دو شعاع و اعظم از تفاضل آنها

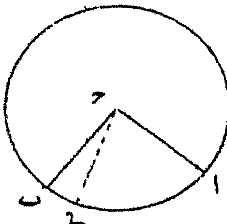


برهان دو مرکز را وصل میکنیم بنقطه فصل مشترک اتا مثلثی ترکیب شود که اضلاعش یکی خط المرکزین ح ح' باشد و دیگر دو شعاع ح ا و ح' ا و ثانیاً مبرهن شده که در مثلث هر ضلع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر و اطول از تفاضل آنها عکس این شکل مذکور نیز صحیح است و بهمان وجه مبرهن شود مثلاً اگر بعد المرکزین اقصر باشد از مجموع دو شعاع و اطول از تفاضل آنها دو دایره متقاطع شوند زیرا که اگر متخارج یا متداخل بودند بعد المرکزین اعظم میشد از مجموع آنها یا اصغر از تفاضلشان

واگر مماس همدیگر بوند بعد المرکزین مساوی میشد بمجموع دو شعاع یا بتفاضل آنها

قضیهٔ هفدهم

در یک دایره یا در دو دایرهٔ متساویه هرگاه دو زاویهٔ مرکزیهٔ احب و دحه متساوی باشند دو قوس اب و ده مقابل با آنها متساوی هستند و بالعکس اگر دو قوس اب و ده متساوی باشند دو زاویهٔ مرکزیهٔ احب و دحه مساوی میشوند



برهان اولاً اگر دو زاویه متساوی باشند و یکی را بر دیگر قرار دهیم درست منطبق شوند و چون اضلاع آنها متساویت نقطهٔ ا واقع شود بر د و نقطه ب بر ه و آنوقت قوس اب باید واقع شود بر ده والا نقاطی پیدا میشد مختلفة البعد از مرکز پس اب = ده

ثانیاً اگر قوس اب مساوی باشد با ده دو زاویهٔ مقابله متساوی میشوند زیرا که اگر چنین نباشد و مثلاً احب اعظم باشد زاویهٔ احع را مساوی دحه جدا میکنیم آنوقت قوس اع = ده و بفرض اب = ده پس اع = اب یعنی جزو مساوی بکل و این خلاف است پس احب = دحه

قضیهٔ هیجدهم

در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه نسبت مابین دو زاویهٔ مرکزیه مثل نسبت دو قوس واقع مابین اضلاع آنها است

دو زاویهٔ مرکزیهٔ دو دایرهٔ متساویه احب است و دحه و اول فرض میکنیم که دو قوس

اب و ده مقیاس مشترکی داشته باشند و آن ۷ مرتبه در اب بگنجد و ۴ مرتبه در ده و از اینقرار نسبت اب به ده این باشد $\frac{۷}{۴}$

حال نقاط تقسیم دو قوس را بدو مرکز وصل میکنیم آنوقت زاویه احب بر هفت جزء متساوی قسمت شود چونکه قسی مقابلهٔ آنها متساوی هستند و زاویه دحه چهار از آن اجزا را شامل است پس نسبت آندو زاویه مثل ۷ است به ۴

واگر دو قوس اب و ده متباین باشند قوس ده را بر سه جزء مثلاً قسمت میکنیم و فرض میکنیم اب چهار از این اجزا را شامل شود و قوس کب کوچکتر از یک جزء باقی ماند در اینصورت نسبت اب به ده اعظم باشد از $\frac{۴}{۳}$ و اصغر از $\frac{۵}{۳}$

وچون دو مرکز را بنقاط تقسیم وصل کنیم زاویه دحه بر سه جزء متساوی قسمت میشود و زاویه احب چهار از این اجزا را شامل میشود و باقی میماند کسر کحب کوچکتر از یک جزء پس نسبت آندو زاویه نیز واقع باشد مابین $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۵}{۳}$ پس دو نسبت احب : دحه و اب : ده هر کدام ۴ مرتبه شامل شدند کسر $\frac{۱}{۳}$ را و بهمین وجه ثابت میکنیم که هر دو یکمرتبه شامل میشوند $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۰۰}$ و $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ و .... را و بطور کلی جزء تامی از واحد را که هر قدر بخواهیم کوچک باشد پس آن دو نسبت متساوی باشند

در تقدیر زوایا و مقیاس آنها

تقدیر نمودن هر شئ عبارت از اینست که معلوم کنیم نسبت آن شئ را با واحد نوع خود
و از همین قرار تقدیر نمودن زاویه عبارت است از اینکه بسنجیم آنرا از زاویه قائمه که واحد
فرض شده و نسبتش را معلوم کنیم

و بنابر شکل مذکور عوض آنکه نسبت مابین دو زاویه مرکزیه بدست آوریم میتوان
معلوم کرد نسبت دو قوس واقع مابین اضلاع آنها را مثلاً عوض آنکه زاویه را با قائمه
بسنجیم قوس مقابلش را با ربع محیط نسبت کنیم و از اینجا است که بطریق اختصار گوئیم که
اندازه و مقیاس زاویه مرکزیه قوس مقابل اوست

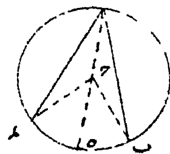
و من باب تسهیل مقایسه محیط دایره را بر ۳۶۰ جزو متساوی قسمت کنیم و هر
کدام را درجه گوئیم و درجه را بر ۶۰ دقیقه و آنرا بر ۶۰ ثانیه و هکذا

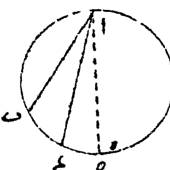
پس اگر قوس واقع مابین ضلعین زاویه مرکزیه ۲۴ درجه باشد مقیاس زاویه چنین است
$\frac{۲۴}{۹۰}$ یا $\frac{۴}{۱۵}$

شرح ـ چون دلیل مذکور را در قطاع تکرار کنیم ثابت میشود که در دو دایره متساوی
نسبت دو قطاع بهمدیگر مثل نسبت مابین دو قوس مقابل با آنها است

قضیه نوزدهم

مقیاس زاویه محیطه ب ا ج نصف قوس ب د ج واقع مابین ضلعین است



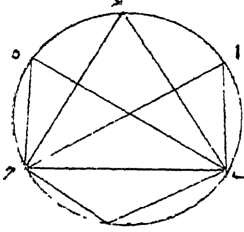


برهان اول فرض میکنیم که مرکز دایره در زاویه
مفروضه واقع شود و قطر ا د را وصل میکنیم با دو شعاع
ج ب و ج ج آنوقت زاویه ب ج د خارج
مثلث ا ب ج مساوی شود با مجموع دو زاویه داخله
ج ا ب و ا ب ج و ۲ و ۱ و مثلث ب ا ج متساوی

الساقین است و زاویه ج ا ب = ا ب ج پس زاویه ب ج ه مضاعف زاویه ب ا ج
باشد و مقیاس زاویه مرکزیه ب ج ه قوس ب ه باشد پس مقیاس زاویه ب ا ج
نصف قوس ب ه باشد و بهمان دلیل مقیاس ج ا د نصف قوس ه د باشد پس مقیاس

ب ا ج + ج ا د = نصف ب ه + نصف ه د = نصف ب د

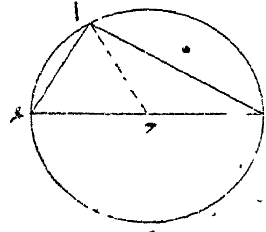
دویم فرض میکنیم که مرکز ج واقع شود در خارج زاویه ب ا د و قطر ا ه را وصل میکنیم پس
مقیاس زاویه ب ا ه نصف قوس ب ه باشد و مقیاس زاویه د ا ه نصف د ه
پس مقیاس تفاضل ب ا د نصف ب ه ـ نصف ه د باشد یعنی نصف ب د



پس مقیاس هر زاویه محیطیه نصف قوس مقابل اوست

نتیجهٔ ۱ جمیع زوایای ب ا ج و ب د ج وغیره محاطیه در یک قطعه دایره متساوی باشند چونکه مقیاس هر کدام نصف قوس ب د ج است

نتیجهٔ ۲ زاویه ب ا د محاطیه در نصف دایره قائمه است چونکه مقیاسش نصف نیم دایره ب ه د است یعنی ربع محیط و چون این نتیجه معتبر است بوجهی مستقل آنرا مبرهن سازیم پس شعاع ا ج را وصل کنیم آنوقت مثلث ب ا ج متساوی الساقین باشد و زاویهٔ



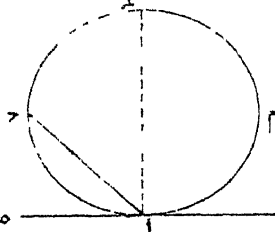
ب ا ج = ا ب ج و همچنین مثلث ج ا د و زاویهٔ ج ا د = ا د ج پس ب ا ج + ج ا د یعنی
ب ا د = ا ب د + ا د ب و چون مجموع دو زاویه ب و د از مثلث ا ب د مساوی
شد با زاویه سیم ب ا د دلیل است بر اینکه مجموع ۳ زاویه اش مساوی باشد با دو
برابر زاویه ب ا د و از خارج میدانیم که آن مجموع دو قائمه است پس زاویه ب ا د

یک قائمه است

نتیجهٔ ۳ - هر زاویهٔ مثل ب ا د (شکل نتیجهٔ اول) که محاط باشد در قطعه بزرگتر از نصف محیط ح ا و ه است زیرا که مقیاسش نصف قوس ب د ه باشد و این قوس اصغر است از نصف محیط و هر زاویهٔ مثل ب د ح که محاط باشد در قطعهٔ کوچکتر از نصف محیط منفرجه است چونکه مقیاسش نصف قوس ب ا ح باشد و این قوس اعظم است از نصف محیط

قضیهٔ بیستم

مقیاس زاویهٔ ب ا د حادثه مابین ظل و وتر نصف قوس ا م د واقع مابین دو ضلع از زاویه است

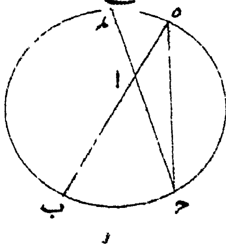


برهان بر نقطه تماس قطر ا د را رسم کنید پس زاویهٔ ب ا د قائمه باشد و مقیاسش نصف محیط ا م د است و مقیاس زاویهٔ د ا ح نصف قوس د ح است پس مقیاس ب ا د + د ا ح یا ب ا ح نصف ا م د است + نصف د ح یعنی نصف قوس ا م د ح

و بهمین وجه ثابت میکنم که مقیاس زاویهٔ ح ا ه نصف قوس ا ح واقع مابین ضلعین او است

قضیهٔ بیست و یکم

مقیاس زاویهٔ ب ا ح حادثه بر نقطهٔ فصل مشترک دو قاطع ب ه و د ح که داخل شده در درون دایره است مساویست به نصف قوس ح واقع مابین ضلعینش باضافه نصف قوس و اقع مابین استقامت اند و ضلع



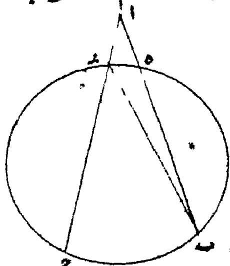
برهان زاویهٔ ب ا ح خارج مثلث ا ه ح

مساویست بمجموع دو زاویه ا ه ج و ا ج ه و مقیاس این دو زاویه نصف دو قوس ب د و ج ه است

قضیهٔ بیست و دوم

مقیاس زاویهٔ ب ا ج حادثه ما بین دو قاطع ا ب و ا ج که راسش در خارج دایره است مساویست با نصف قوس مقعر ب ج منهای نصف قوس محدب د ه

برهان زاویه ا مساویست بتفاضل دو زاویه ب د ج و ا ب د و مقیاس زاویه اول نصف ب ج است و مقیاس دویم نصف د ه

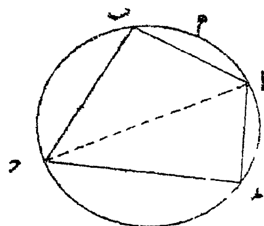


حکم مذکور کلی است اگر چه یکی از دو ضلع زاویه یا هر دو ضلع مماس دایره باشد و دلیل همانست که ذکر شد

نتیجه — قوس ب ا ج (شکل نتیجه اول ۱۹) مکان هندسی رؤس زوایائی است که مساوی باشند با ج د ب و اضلاعشان مرور کنند بر دو نقطه ج و ب زیرا که جمیع زوایای محاطیه در قطعه ج ا ب مساوی هستند با ج د ب و از دو قضیه سابقه مذکوره چنین نتیجه شد که هر زاویه که ضلعینش مرور کنند بر ج و ب و راسش واقع نباشد بر قوس ج ا ب مساوی نیست با زاویه ج د ب

قضیهٔ بیست و سیم

در شکل ذوالاربعه محاطی مثل ا ب ج د هر دو زاویه متقابل تمام همدیگر باشند تا دو قائمه



زیرا که مقیاس مجموع دو زاویه ا د ج و ا ب ج نصف محیط ا ب ج د است و بالعکس اگر در ذو اربعة اضلاعی

دو زاویهٔ مقابله اه‌ح و اد‌ح تمام همدیگر باشند آن شکل قابل محاط شدن در دایره است

برهان چون دایره بر سه نقطهٔ ا و د و ح مرور دهیم مقیاس زاویهٔ اد‌ح نصف قوس اه‌ح

میشود پس مقیاس زاویهٔ اه‌ح که تمام اوست نصف قوس باقی اد‌ح باشد یعنی از زاویه

مساویست با زوایای محاطیه در قطعه اه‌ح و این تساوی محقق نشود جز آنوقت که نقطهٔ ه

واقع باشد بر قوس ام‌ح فهو المطلوب

مسائل متعلقه بمقالهٔ اولی

مسئلهٔ اول

میخواهیم خط اب را بدو جزو متساوی قسمت کنیم

از دو مرکز ا و ب و بشعاعی اطول از نصف اب دو

قوس رسم کنید تا متقاطع شوند بر نقطهٔ د این نقطه متساوی البعد است از طرفین ا و ب

و بهمین وجه نقطهٔ دیگر ه را در فوق یا تحت اب بدست آورید و آن نیز متساوی البعد است

از همان طرفین و دو نقطهٔ د و ه را بخط ده وصل کنید آن خط مفروض اب را بنقطهٔ ح نصف کند

برهان دو نقطهٔ د و ه متساوی البعد شدند از طرفین ا و ب پس باید واقع شوند بر عمود

وارد بر وسط اب و بر دو نقطه بیش از یک خط نتوان مرور داد پس ده همان عمود است

و اب را بر ح نصف کند

مسئلهٔ دویم

میخواهیم از نقطهٔ ا مفروضه بر خط ب‌ح عمودی

بر آنخط اخراج کنیم

دو نقطهٔ ب و ح را در طرفین ا بیک فاصله نشان کنید

و از مرکز این دو نقطه و بشعاعی اطول از ب‌ا دو قوس رسم کنید تا بر نقطهٔ د متقاطع شوند و خط

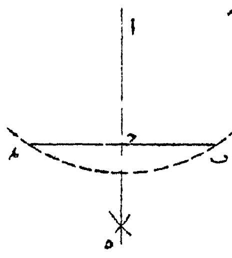
اد را وصل کنید که عمود مطلوب است

برهان نقطه د چون متساوی البعد است از طرفین ب و ح متعلق باشد بعمود وا بر وسط ب ح بس اد همان عمود است

شرح - هرگاه بخواهیم بر نقطه ا از خط ب ح زاویه قائمه ب اد رسم کنیم باید وجه مذکور را بعینه استعمال نمود

مسئله سیم

میخواهیم از نقطه ا مفروضه در خارج خط ب د عمودی بر آن خط وارد آوریم

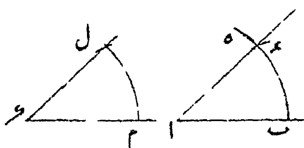


از مرکز ا و بشعاع مناسبی قوسی رسم کنید تا خط ب د را بر دو نقطه ب و د قطع کند و بعد بطریق مسئله اول نقطه مثل ه بدست آورید که متساوی البعد باشد از طرفین ب و د یعنی این دو نقطه را مرکز نموده دو قوس بیک شعاع رسم کنید تا متقاطع شوند بر ه و خط ا ه را وصل کنید که عمود مطلوب است

برهان دو نقطه ا و ه متساوی البعد اند از طرفین ب و د پس متعلق اند بعمود ا ه که بر وسط ب د اخراج شود

مسئله چهارم

میخواهیم بر نقطه ا از خط اب زاویه مساوی با زاویه مفروضه ک رسم کنیم

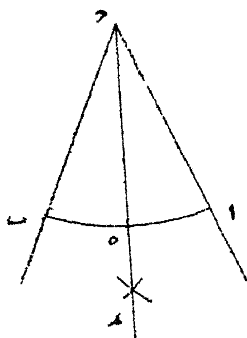


از مرکز ک و بشعاعی مناسب قوس م ل را رسم کنید و منتهی نمائید ش بدو ضلع زاویه و از مرکز ا و بشعاع اب = ک م قوس غیر معین ب ه را رسم کنید و بعد بشعاعی برابر و تر

م ل و از مرکز ب قوسی رسم کنید تا قوس غیر محدود ب ه را بر نقطه د قطع کند وخط ا د را وصل نمائید که زاویه د ا ب مساوی باشد بزاویه مفروضه ک

برهان دو قوس ب د و م ل چون از دو دایره متساویه اند وصاحب دو وتر متساوی پس متساوی باشند و زاویه ب ا د = م ک ل

مسئله پنجم



میخواهیم زاویه مفروضه یا قوسی مفروض ا ب را بر دو جزو متساوی قسمت کنیم

اولاً اگر بخواهیم قوس ا ب را نصف کنیم از دو مرکز ا و ب و بشعاعی مناسب دو قوس رسم میکنیم تا بر نقطه د متقاطع شوند و خط ح د را وصل میکنیم و آن قوس ا ب را نصف کند بر نقطه ه

برهان هر کدام از دو نقطه ح و د متساوی البعد اند از طرفین ا و ب از وتر ا ب پس خط ح د عمود باشد بر وسط این وتر پس نصف کند قوس ا ب را بر نقطه ه

ثانیاً اگر بخواهیم زاویه ا ح ب را نصف کنیم اول از مرکز ح قوس ا ب را رسم کنیم و بعد عمل مذکور را جاری کنیم

شرح — میتوان بهمین عمل هر یک از دو نصف ا ه و ه ب را نصف نمود و بنابرین میتوان بتقسیمات متتالیه زاویه یا قوسی را ربع نمود و بعد ثمن و نصف ثمن و غیره

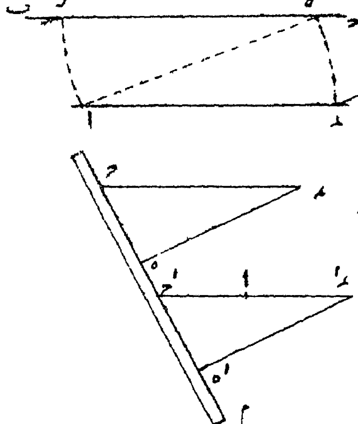
مسئله ششم

میخواهیم بر نقطه ا خطی موازات ب ح رسم کنیم

از مرکز ا و بشعاعی مناسب قوس ه د را رسم کنید و از مرکز ه و با همان شعاع قوس

اد را بعد هد را مساوی اد جدا کنید ﻭ اه را وصل نماید که موازی مطلوب است

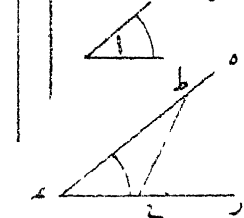
برهان چون اه را وصل کنید دو زاویه متبادله داخله اهد و هاه متساوی میشوند پس دو خط اد و هد متوازی باشند ق ۲۷ د ا



این مسئله را بیشتر با آلت گونیا حل کنیم و آن مثلث قائم الزاویه است حـ د ه پس ضلع ترش را آورده ایم بر خط حد که میخواهیم موازاتش بر نقطه ا خطی مرور دهیم و ستاره ثابتی مثل دم را بر قاعده ه حـ اش تکیه دهیم و گونیا را در طول ستاره بلغزانیم تا وترش بر نقطه ا گذرد و خط حـ د را رسم کنیم و آن موازی باشد با حـ د چونکه دو زاویه متقابله د ح م و ا ح م متساوی هستند ۲

مسئلهٔ هشتم

از مثلثی دو ضلع ب و حـ و زاویه بینهما ایش معلوم است میخواهیم مثلث را رسم کنیم



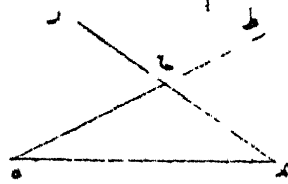
خط ده را بر نقطه د رسم کنید زاویه هد و را مساوی ا ترتیب دهید و د ط را مساوی ب جدا کنید د ع را مساوی حـ و ط ع را وصل کنید و د ط ع مثلث مطلوب است

مسئلهٔ نهم

یک ضلع و دو زاویه مثلثی معلوم است میخواهیم مثلث را رسم کنیم

دو زاویه مفروضه هر دو مجاوره از ضلع معلوم و یا یکی مجاوره است و دیگر مقابله پس اگر چنین باشد زاویه سیم را به قصور مسئله ۱۰ معلوم کنیم و آنوقت دو زاویه مجاوره در

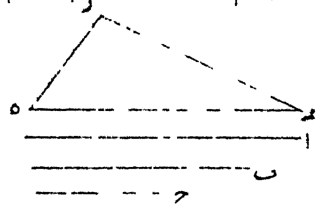
دست است پس خط ده را مساوی ضلع معلوم رسم کنیم
و بر نقطه د رسم کنیم زاویه



ه د ر را مساوی یکی از اندو زاویه مجاوره و بر نقطه
ه زاویه د ه ط را مساوی زاویه دیگر پس دو ضلع
د ر و ه ط بر نقطه ح متقاطع شوند و د ه ح مثلث مطلوب است

مسئله دهم

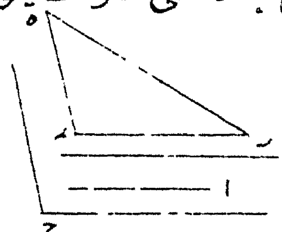
سه ضلع ا و ب و ح از مثلثی معلوم است میخواهیم آن مثلث را رسم کنیم



ده را مساوی ضلع ا رسم میکنیم و از مرکز د و
بشعاعی مساوی ضلع دویم ب قوس رسم میکنیم
و از مرکز ه و بشعاعی مساوی ح قوس دیگر این
دو قوس نقطه و متقاطع شوند و دو خط د و
ه و را رسم میکنیم و د ه و مثلث مطلوب است
نتیجه شرط امکان عمل انست که دو قوس مرسوم از دو مرکز ه و د بر نقطه متقاطع شوند
پس باید ضلع ده اقصر باشد از مجموع دو ضلع دیگر و اطول از تفاضل آنها ع ا و ۲

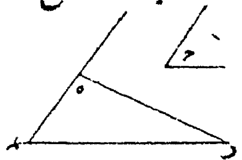
مسئله یازدهم

دو ضلع ا و ب و زاویه ح مقابل بضلع ب از مثلثی معلوم است میخواهیم
آن مثلث را رسم کنیم

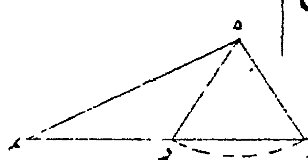


این مسئله دو حالت دارد اول آنکه زاویه ح
قائمه یا منفرجه باشد پس زاویه ه د ر را مساوی
ح رسم میکنیم و ده را مساوی ا جدا

میکنیم و از مرکز ه و بشعاعی مساوی ب قوسی رسم میکنیم تا خط د ه را بر نقطه د قطع کند و ه د را وصل میکنیم ه د ه مثلث مطلوب میشود



در حالت مذکور باید ضلع ب اطول باشد از ا چونکه زاویه قائمه یا منفرجه ح اعظم است از سایر زوایای مثلث و ب ضلع مقابلش باید اطول باشد



حالت دوم آنست که زاویه ح حاده باشد پس اگر ضلع ب اطول باشد از ا عمل مذکور را جاری میکنیم و ه د ه مثلث مطلوب میشود



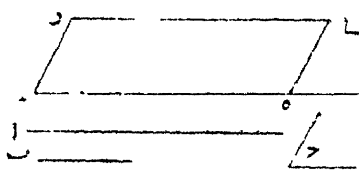


ولی اگر زاویه ح حاده باشد و ضلع ب اقصر از ا قوس مرسوم از مرکز ه و بشعاع ه ر = ب قطع کند ضلع ه د را بر دو نقطه د و ط که هر دو در یک سمت ه واقع شده اند پس حادث شود دو مثلث ه د ه و ه ه ط که هر دو در مسئله صدق کنند

شرح ـ ضلع ب اگر اقصر بشد از عمودی که از ه بر ه د فرود آید مسئله در هیچ حالت جواب ندارد

مسئلهٔ دوازدهم

در متوازی الاضلاعی دو ضلع مجاور ا و ب و زاویه بینهما ح معلوم است و میخواهیم آنشکل را رسم کنیم



خط ه ه را مساوی ا رسم میکنیم و بر نقطه ه زاویه د ه ه را مساوی ح و خط ه د را مساوی ب جدا میکنیم و دو قوس رسم میکنیم

یکی از مرکز ر و بشعاع ب ج = د ه و دیگر از مرکز ه و بشعاع ه ج مساوی ب د این دو قوس
بر نقطه ج تقاطع شوند و ب ج و ه ج را وصل کنیم پس ب ه ج ر متوازی الاضلاع مطلوب
برهان- بروش عمل مذکور هر دو ضلع متقابل متساوی باشند و بنابراین شکل مرسوم متوازی
الاضلاع است و ۳۴ (۱) و مرکب است از دو ضلع و زاویه مفروض

نتیجه- اگر زاویه مفروضه قائمه باشد شکل مربع مستطیل شود و اگر علاوه بر آن دو ضلع
معلوم متساوی باشند آن شکل مربع شود

مسئله سیزدهم

میخواهیم مرکز دایره مفروضه یا قوس مفروض را مشخص کنیم

بر محیط دایره یا قوس مفروض سه نقطه ا و ب و ج
را نشان میکنیم و دو خط ا ب و ب ج را مابین آنها
وصل میکنیم و بدو عمود د ه و ر ط هر دو را نصف میکنیم پس نقطه ه فصل مشترک این دو
عمود مرکز مطلوب است

شرح هرگاه بخواهیم بر سه نقطه ا و ب و ج دایره گذرانیم یا بر مثلث ا ب ج دایره
محیط کنیم باید عمل مذکور را بعینه مجری داشت

مسئله چهاردهم

میخواهیم بر نقطه معینه خطی مرور دهیم که
مماس شود بر دایره مفروضه

این مسئله دو حالت دارد نقطه مفروضه اگر بر محیط
باشد مثل ا شعاع ج ا را وصل میکنیم و ا د را عمود

میکنیم برآن و آن مماس مطلوب است (۲ و ۹ و)

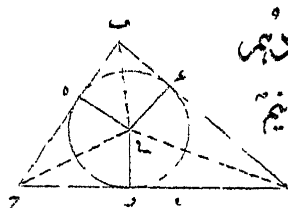
واگر نقطهٔ ا خارج دایره باشد مابین آن نقطه و مرکز دایره رابخط د ا وصل میکنیم و آنرا برنقطهٔ ه نصف میکنیم و از مرکز ه و بشعاع ه د دایره رسم میکنیم تا محیط مفروض را برنقطهٔ ب قطع کند و خط ا ب را وصل میکنیم که مماس مطلوب است

برهان چون د ب را وصل کنیم زاویهٔ د ب ا محاطیه در نصف دایره قائمه باشد (۱۹ و ۲) و بنا براین ا ب عمود باشد بر طرف شعاع د ب یعنی مماس دایره باشد

شرح ـ نقطهٔ ا چون در خارج دایره واقع است از آنجا دو مماس متساوی میتوان برد آ رسم نمود یکی ا ب است و دیگر ا ه زیرا که در دو مثلث قائم الزاویه د ب ا و د ه ا چون وتر د ا مشترک است و ضلع د ب = د ه این دو مثلث متساوی باشند (۱۹ و ۱)

پس ا ه = ا ب و نیز زاویه د ا ه = د ا ب

مسئلهٔ پانزدهم



میخواهیم در مثلث ا ب ح دایره محاط کنیم بر دو زاویهٔ ا و ب دو خط منصف الزاویه ا ع و ب ع را مرور دهیم این دو خط متقاطع شوند بر نقطهٔ ع و این نقطه متساوی البعد باشد از سه ضلع ا ب و ا ح و ب ح پس اگر از آن نقطه سه عمود ع ه و ع ه و ع د را بر اضلاع مثلث فرود آوریم متساوی شوند و دایره که از این نقطه و بشعاع ع ه رسم شود مماس باشد بر سه ضلع

تنبیه ۱ نقطهٔ ع بیک فاصله است از دو ضلع ب ح و ا ح و متعلق باشد بخط منصف الزاویه ح پس سه خط منصف الزوایای مثلث بر نقطهٔ متقاطع شوند

تنبیه ۲ ـ چون دو زاویه خارجیه م ب ح و ب ح ن را بدو خط نصف کنیم

آن دو خط بر ه متقاطع شوند و این نقطه مرکز
دایره است که مماس شود بر ضلع ب ح و
بر استقامت د و ضلع دیگر همچنین و نقطه
ه' و ه'' مرکز دو دایره باشند که مماس شوند
بر یکی از اضلاع مثلث و بر استقامت دو
ضلع دیگر پس معلوم میشود که بر سه خط مفروض چهار دایره میتوان مماس نمود

مسئلهٔ شانزدهم

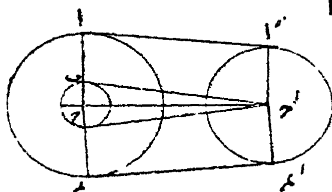
میخواهیم بر خط اب قطعهٔ دایره رسم کنیم که قابل احتوای زاویه مفروضه
ح باشد یعنی چنان باشد که جمیع زوایای محاطیه اش مساوی با زاویه ح باشند

اب را بسمت م امتداد میدهیم و بر نقطهٔ ب زاویه
م ب ط را مساوی ح رسم میکنیم و ب ه را عمود میکنیم
بر ب ط و ح ه را عمود بر وسط اب این دو
عمود متقاطع شوند بر ه و از این نقطه و بشعاع ه ب
دایره رسم کنیم و قطعه مطلوبه ام ب است
برهان چون ب د عمود است بر طرف شعاع
ه ب مماس دایره باشد و مقیاس زاویه
اب د نصف قوس اك ب است و ۲٫۲۵
مقیاس زاویه محیطیه ام ب نیز نصف قوس اك ب است پس زاویه ام ب = اب د
= ط ب م = ح پس جمیع زوایای محاطیه در قطعه ام ب مساوی باشند بزاویه مفروضه ح
شرح - اگر زاویه مفروضه قائمه بود قطعه مطلوبه بنصف دایره میشد مرسومه بر قطر اب

مسئلهٔ نهم

میخواهیم بر دو دایره خطی مماس مشترک رسم کنیم

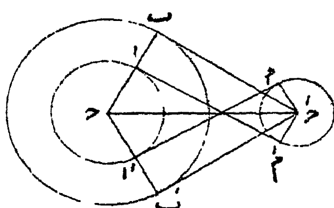
اول فرض میکنیم مسئله حل شده باشد و اا' مماس مشترک خارج باشد بر دو دایره و دو شعاع حا و ح'ا' را بر دو نقطهٔ مماس وصل میکنیم و خط ح'ب را موازی با اا' پس دو شعاع حا و ح'ا' چون عمود اند بر اا' عمود باشند بر ح'ب پس خط ثانی مماس شود بر دایره که از مرکز ح رسم شود بشعاع حب = حا - ح'ا' پس از این تفصیل دستور العمل ذیل استنباط شود



از مرکز ح و بشعاعی مساوی بتفاضل حا - ح'ا' دایره رسم کنید و از نقطهٔ ح' خطی بر این دایره مماس کشید و چون نقطهٔ ب بدست آمد خط حب ا' رسم کنید و ح'ا' را بموازات حا و خط اا' را اخراج نمائید که مماس مطلوب است

از دستور العمل مذکور چنین استنباط میشود که مسئله صاحب دو جواب است چونکه از نقطهٔ ح' دو خط مماس میتوان بر دایره مرور داد و شرط امکان مسئله اینست که حح' ≥ حا - ح'ا' و بعبارت اخری اینست که دو محیط متداخل نباشند و الا جواب ندارد

حال میخواهیم خطی مماس مشترک بر دو دایره رسم کنیم دو شعاع آنها حا است و ح'م و خط ام' مماس مطلوب باشد پس بر دو نقطهٔ مماس دو شعاع حا و ح'م را وصل میکنیم و خط ح'ب را بموازات



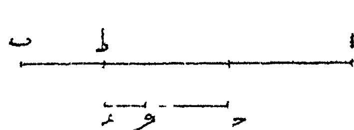
ام حال چون ام عمود است بر دو شعاع د ا و د م خط د ب نیز عمود باشد بر
همان دو خط و بنابراین مماس شود بر دایره که از مرکز د رسم شود بشعاع د ب = د ا
+ اب = د ا + د م

و دستور العمل این شد که از مرکز د و بشعاع مساوی مجموع دو شعاع
دو دایره مفروضه دایره رسم کنیم و از نقطه د خط د ب را بر آن مماس کنیم و باقی
عمل را بطریق مذکور جاری نمائیم

این مسئله نیز صاحب دو جواب است ولی شرط امکانش اینست که د د ≥ د ا + د م
یعنی متخارجه باشند یا مماس خارج

مسئلهٔ هیجدهم

میخواهیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک ما بین دو خط اب و حد معلوم
کنیم و بعد نسبت عددی آنها را



بزرگتر مقسوم علیه مشترک این دو خط
ممکن نیست از خط اقصر حد تجاوز کند

ولی این خط اگر بمرات صحاح در خط اطول اب بگنجد درینصورت خود بزرگتر مقسوم علیه
مشترک مطلوب است پس آنرا بر اب نقل میکنیم و فرض میکنیم اب = ۲ حد
+ ط ب و میگوئیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک ما بین اب و حد بعینه همانست
که موجود باشد ما بین دو خط حد و ط ب

زیرا که هر مقسوم علیهی که مشترک باشد ما بین اب و حد چون عاد میکند حد را
عاد کند اط را و چون عاد میکند اب را عاد کند درست باقی ط ب را پس
مقسوم علیه مشترک باشد ما بین اب و حد

دارنده قرار

وازینقرار جمیع مقسوم علیه‌های مشترک مابین اب و حد بعینه همانهاست که یافت شود مابین حد و طب پس بزرگتر آنها نیز یکی باشد

حال طب را بر حد نقل میکنیم و فرض میکنیم حد = طب + لد و بطریق مذکور ثابت میکنیم که بزرگتر مقسوم علیه مشترک مابین حد و طب همانست که یافت شود مابین طب و لد

حال لد را بر طب نقل میکنیم و فرض میکنیم طب = ٢ لد وخط لد بزرگتر مقسوم علیه مشترک باشد مابین اب و حد

وازمساویهای سابقه این دو مساوی نتیجه شود

حد = ٣ لد
اب = ٨ لد

پس نسبت اب به حد بقدر ٨/٣ است

تنبیه ـ در آخر عمل چنین فرض کردیم که سلسلهٔ اعمال منتهی شود بباقی صفر و حال میخواهیم ثابت کنیم که اگر دو خط صاحب مقیاس مشترک باشند فرض صحیح است والّا اگر اصم باشند بصفر نمیرسیم ولی باقی‌ماندها متدرجاً کوچکتر میشوند تا هر حد که خواسته باشیم

بنابرین فرض میکنیم ح و د دو خط مفروض باشد و ب١، ب٢، ب٣، ب٤، ب٥ ... باقی‌ماندهای متتالی باشند و خ١، خ٢، خ٣، خ٤، خ٥ ... خارج قسمتها پس این چند مساوی حاصل شود

ح = د خ١ + ب١
د = ب١ خ٢ + ب٢
ب١ = ب٢ خ٣ + ب٣
ب٢ = ب٣ خ٤ + ب٤
....
....

باقی ب١ کوچکتر است از ح/٢ زیرا که هرگاه بیش از یکمرتبه در ح نگنجد بزرگتر باشد از

ج/۴ پس آن باقی کوچکتر باشد از ج/۴ و اگر چندین مرتبه در ح بکنیم حکم مذکور بطریق اولی صحیح باشد و بهمانطور این چند نامساوی حاصل شود

ب/۳ > ب/۲ و بنابراین ب/۳ > ج/۴

ب/۵ > ب/۴ و بنابراین ب/۵ > ج/۸

ب/۷ > ب/۶ و بنابراین ب/۷ > ج/۱۶

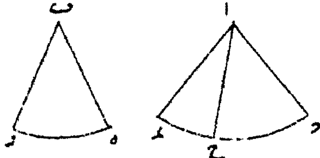
و همچنین در ما بقی

پس معلوم شد که اگر رشته عمل را بی اندازه ممتد کنیم باقی ماندها انقدر کوچک میشوند که نحوی که باقی ماندهای بیاد شود کوچکتر از مقسوم علیه مشترک و اینحکم بنابر قضیه مذکوره باطل است و بنابراین اگر مقسوم علیه مشترکی در میان نباشد البته باقی مانده صفر خواهیم رسید و الّا لازم آید

مسئله نوزدهم

میخواهیم بزرگترین مقسوم علیه مشترک مابین دو زاویه ا و ب را اگر داشته باشد معلوم کنیم و بعد از آن نسبت عددی آنها را

از دو مرکز ا و ب و بیک شعاع دو قوس ح د و ه ر را رسم کنید و اینها مقیاس اند دو زاویه اند پس بطریق مسئله سابقه



عمل را در دو قوس ح د و ه ر جاری نمائید زیرا که همانطور که خطی را بر خطی نقل میکنیم میتوان قوسی را نقل نمود بر قوس دیگر که بهمان شعاع باشد پس اگر این دو قوس را مقسوم علیه مشترکی باشد بوجه مذکور بدست آید و بعد نسبت عددی آنها و این نسبت بعینه نسبت مابین دو زاویه مفروضه است و ا ح مثلا اگر ح ط مقیاس مشترک دو قوس باشد ا ح مقیاس مشترک دو زاویه است و اگر دو قوس مفروض اصم باشند دو زاویه نیز چنین است و آنوقت باید نسبت تقریبی آنها را بدست آورد.

مقالهٔ سیم

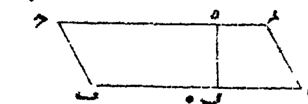
در مقیاس و مساحت اشکال ذوکثیرة الاضلاع و تشابه آنها

حدود

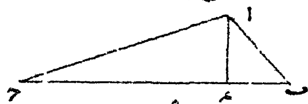
۱- مساحت شکل عبارت است از نسبت وسعت آن شکل بوسعت واحد سطح
و در کلام ممکن است دو کلمهٔ سطح و مساحت بجای همدیگر استعمال شوند

۲- دو شکل متعادل آنستکه از حیثیت مساحت متساوی باشند
دو شکل ممکن است متعادل باشند با آنکه بحسب صورت هیچ متشابه نباشند مثل دایره و مربع
و همچنین مثلث و مربع مستطیل و امثال آنها
در دو شکل کلمهٔ تساوی مخصوص آن است که چون یکی از آنها بر دیگری نقل شود در جمیع اجزای
خود بر هم منطبق شوند مثل دو دایره که صاحب یک شعاع باشند و دو مثلثی که اضلاع آنها
نظیر بنظیر متساوی باشند و امثال آنها

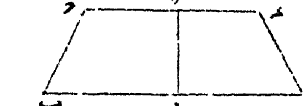
۳- ارتفاع متوازیة الاضلاع عبارت است از عمود ه و که اندازهٔ فاصله مابین
دو ضلع متقابله قاعدتین اب و حد باشد



۴- ارتفاع مثلث عمود اد است که از رأس
زاویهٔ ا اخراج شده باشد بر ضلع مقابل ب ح که قاعده است



۵- ارتفاع ذوذنقه عمود ه و است که مابین دو
ضلع متوازیش اب و حد اخراج شده باشد



تنبیه قبل از رسیدن باین مقاله و مقالات مابعد باید خواص تناسبات را دانست و تفصیل
آنرا در اصول حساب و اصول جبر و مقابله ذکر نموده ایم و اینجا نظر بآنکه در احکام و براهین
مابعد ابهامی نباشد بعضی تناسب اشاره نمائیم تناسب بهیأت ا : ب = ح : د و ارجاع

میدانیم که حاصل ضرب طرفین ا × د مساویست با حاصل ضرب وسطین ب × ج
این حکم در اعداد محقق است و گوئیم بجمیع مقادیر تعلق گیرد مشروط بر آنکه بعدد تعبیر شده باشند
یا چنان تصور کنیم که تعبیر شده اند و اینفرض [illegible] وقوع یافت مثلا چهار مقدار ا و ب و ج
و د اگر خطوط باشند چنان تصور میکنیم که یکی از آنها یا خطی بحجم مقیاس مشترک القسمه باشد
از واحد طول آنوقت هرکدام از ا و ب و ج و د تعبیری است از عده احاد صحاح باشند
یا کسور و منطق باشند یا اصم و تناسب ما بین خطوط ا و ب و ج و د مبدل میشود به تناسب عددیه
پس مضروب دو خط ا و د که مسطح نیز گوئیمش عبارت شد از عدد احاد طولی ا ضرب در عدد
احاد طولی د و معلوم است که چنین حاصل ضرب ممکن است مساوی شود بلکه باید مساوی شود
با حاصل ضربیکه بهمان وجه از دو خط ب و ج بدست آید

دو مقدار ا و ب ممکن است از نوعی باشند مثل خط و دو مقدار ج و د از نوع دیگر مثل سطح
درینصورت باید مقادیر را اعداد فرض نمود ا و ب احاد طول باشند و ج و د احاد سطح
و دو حاصل ضرب ا × د و ب × ج نیز عدد میشوند

و بطور کلی در جمیع اعمال متعلقه بتناسبات باید جملهای آنها هرکدام را عددی فرض نمود
از واحد نوع خود و آنوقت بی زحمت آن اعمال و نتایج شان مفهوم شوند

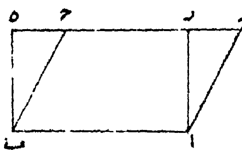
قضیهٔ اول

هر دو متوازی الاضلاعی که بر قاعده و ارتفاع واحد باشند معادل همدیگرند

برهان اب قاعده مشترکه دو متوازی الاضلاع
اب جد و اب هو را است و چون فرض کرده‌ایم
بریک ارتفاع باشند دو قاعده فوقانیشان
دج و ده واقع شوند بر خطی موازی اب و بنابر

تعریف متوازیه الاضلاع اد = ب ح و ار = ب ه وهمچنین د ح = اب و ر ه =
= اب پس د ح = ر ه حال چون از تمام خط د ه یکمرتبه د ح را تفریق کنیم ومرتبه
دیگر ر ه را دو باقی ح ه و د ر متساوی شوند وآنوقت دو مثلث د ار و ح ب ه
اضلاعشان نظیر بنظیر متساوی باشند پس این دو مثلث متساویند

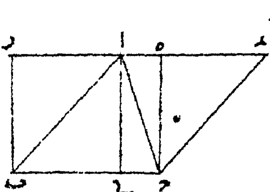
حال چون از ذو اربعه الاضلاع اب ه د مرتبه مثلث ا د ر را موضوع کنیم باقی بماند
متوازی الاضلاع اب ه د ومرتبه دیگر مثلث ح ب ه را باقی بماند متوازی الاضلاع
اب ح د پس این دو متوازی الاضلاع متساوی باشند



نتیجه — هر متوازی الاضلاعی مثل اب ح د
معادل باشد با مسطح اب ه د که بر قاعده وارتفاع او است

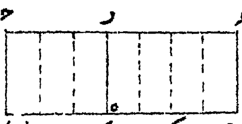
قضیهٔ دوم

مثلث اب ح نصف متوازی الاضلاع اب ح د است که بر قاعده وارتفاع آن باشد
زیرا که دو مثلث اب ح و اح د متساوی هستند (۱۳۳ ق)



نتیجه ۱ — پس مثلث اب ح نصف مسطح ب ح ه د است
که بر همان قاعده ب ح وهمان ارتفاع ا ح باشد
زیرا که مسطح ب ح ه د معادلست با متوازی الاضلاع اب ح د

۲ — جمیع مثلثاتیکه بر قاعده وارتفاع واحد باشند یعنی قواعدشان متساوی باشد وارتفاعاتشان
متساوی معادل همدیگر هستند



قضیهٔ سیم

نسبت دو مسطحی که بر ارتفاع واحد باشند مثل دو قاعدهٔ آنها است

دو مسطح مفروض اب ح د است و ا ه ر د وارتفاع مشترک ا د ومیگوئیم نسبت آنها بهمدیگر مثل اب است به ا ه

برهان فرض میکنیم دو قاعده اب و اه منطق باشند و نسبتشان مثل ۷ باشد به ۴ پس اب را هفت قسمت متساوی کنیم و اه شامل چهار از آن اجزا میشود و از نقاط تقسیم عمودها بر قاعده اخراج کنیم تا هفت سطح جزو متساوی بدست آید چونکه بر قواعد متساویه و برارتفاع واحد اند و سطح اب جد شامل هر هفت جزو است و اه ده شامل چهار از آن اجزا است نسبت اب جد به اه ده مثل ۷ است به ۴ یا مثل اب به اه و دلیل مذکور کلی است هیچ تعلق بعدد ۷ و ۴ ندارد پس بنابر آنکه دو قاعده منطق باشند

اب جد : اه ده = اب : اه

واگر دو قاعده اب و اه اصم باشند باید مانند وجهی را که در ۱۸۱ و ۲۱۲ ذکر شده است اینجا بیان نمود

قضیهٔ چهارم

نسبت دو مسطح بیکدیگر مثل حاصل ضرب دو قاعدهٔ آنها است در دو ارتفاع

فرض میکنیم سه و س مساحت دو مسطح باشند و ه و عه دو بعد مسطح سه و ق و ع دو بعد س و مسطحی دیگر فرض کنیم سه' بر قاعدهٔ اول ه و برارتفاع دوم ع پس بنا بر قضیهٔ سابقه

سه : سه' = عه : ع

سه' : س = ه : ق

این دو تناسب را جزو بجزو درهم ضرب میکنیم و دو جملهٔ اول تناسب حاصل را بر سه' قسمت کنیم چنین شود

سه : س = ه × عه : ق × ع ... (۱)

در مساحت مسطح مساحت نمودن مسطح سه عبارت از یافتن نسبت وسعت او است بمسطحی مثل س که واحد سطح فرض شده

و بنابر قضیهٔ مذکوره این نسبت برابر وجه بدست آید که خطوط ه و عه و ق و ع را بواحد طول سنجیده عدد هرکدام را معلوم کنیم و حاصل ضرب دو عدد اول را بر حاصل ضرب دو عدد

ثانی قسمت کنیم مثال سه = ۶ ذرع عه = ۴ ، ق = ۳ ، ع = ۲

پس سه/س = عه/ق×ع = ۶×۴/۲×۳ = ۴ وبنابراین مسطح سه چهار مثل مسطح س واحدات

بیشتر آنستکه واحد مسطح را مربعی گیرند که ضلعش واحد طول باشد و در اینصورت چون

دو عدد ق و ع هر کدام واحد میشوند تناسب (۱) چنین میشود

سه : س = ه × عه : ۱

پس معلوم میشود که نسبت هر مسطح بمربعی که بر واحد طول مرتب شود مساویست با حاصل

ضرب دو عدد مرادف قاعده و ارتفاعش وقتیکه با واحد طول میشوند و این مطلب بطور اختصار چنین

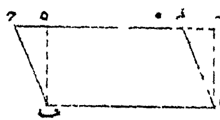
اداکنیم که مقیاس و اندازهٔ هر مسطح حاصل ضرب قاعده اوست در ارتفاعش

مثال ه = ۳٫۵۳ متر و عه = ۲٫۲۵ متر

و مساحت مسطح چنین است ۷٫۹۴۲۵ مترمربع یا ۳۵ سانتیمترمربع ۹۴ دسیمترمربع ۷ مترمربع

قضیهٔ پنجم

مساحت متوازی الاضلاع مساویست بحاصل ضرب قاعده اش در ارتفاعش



برهان - متوازی الاضلاع اب ج د معادلست با مسطح اب ه ر که بر قاعده اب اواست و بر ارتفاع ب ه آنش و مقیاس مسطح مذکور است

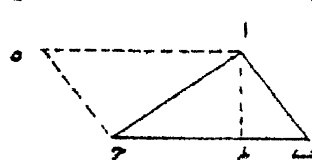
اب × ب ه پس همین حاصل مساحت متوازی الاضلاع باشد

نتیجه - اشکال متوازی الاضلاعی که بر قاعده واحد باشند نسبتشان بهمدیگر مثل ارتفاعات است و آنها که بر ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل قواعد است زیرا که چون اب و د را واحد طول فرض کنیم این تناسب نتیجه میشود ا × د : ب × ج = ا : ب

قضیهٔ ششم

مساحت مثلث مساویست بحاصل ضرب قاعده‌اش در نصف ارتفاع

برهان مثلث ا ب ج نصف متوازی الاضلاع



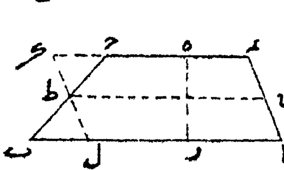
ا ب ج ه است که بر همان قاعده ب ج و همان ارتفاع ا د رسم شده و مساحت شکل ثانی مساویست

با ب ج × ا د و پس مساحت مثلث چنین باشد $\frac{1}{2}$ ب ج × ا د یا ب ج × $\frac{1}{2}$ ا د

نتیجه هر دو مثلث که برابر ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل دو قاعده است اگر بر قاعده واحد باشند نسبتشان مثل دو ارتفاع است

قضیه هفتم

مساحت ذو ذنقه ا ب ج د مساویست با حاصل ضرب ارتفاع ه د در نصف مجموع دو قاعده متوازی ا ب و ج د



برهان از نقطه ط وسط ضلع ج ب خط ك ل را بموازات ضلع مقابل ا د رسم میکنیم و د ج را امتداد میدهیم تا آنرا بر نقطه ك ملاقی کند پس در دو مثلث ط ب ل و ط ج ك ضلع ط ب بعمل = ط ج وزاویه ل ط ب = ج ط ك وزاویه ط ب ل = ط ج ك چونکه ج ك موازیست با ب ل و ا د ل پس این دو مثلث متساوی باشند و ا ا پس ذو ذنقه ا ب ج د مساویست با متوازی الاضلاع ا د ك ل و مقیاس شکل ثانی اینست ه د × ا ل و لی ا ل = د ك و چون مثلث ط ب ل = ك ج ط ضلع ب ل = ج ك پس ا ب + ج د = ا ل + د ك = ٢ ا ل و بنابراین ا ل نصف مجموع دو قاعده ا ب و ج د است نتیجه باینصورت نموده شود ا ب ج د = ه د × $\left(\frac{اب + جد}{2}\right)$

شرح - چون از نقطه ط وسط ب ج خط ط ع را بموازات قاعده ا ب رسم کنیم نقطه ع

نیز بر وسط د

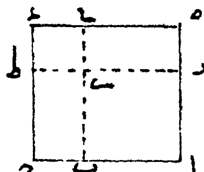
نیز بر وسط اء افتد چونکه شکل اح ط ل وهمچنین شکل دح ط ك نظر بتوازی اضلاع مقابله متوازی الاضلاع اند پس اح = ط ل و د ح = ط ك وچون نظر بتساوی دو مثلث ب ط ل و د ط ك ضلع ط ل = ط ك پس اح = ح د

ونیز ظاهر است که ح ط = ال = $\frac{اب + ح د}{۲}$

پس مساحت ذوذنقه رامیتوان نیز باینصورت نوشت ه د × ح ط یعنی مساویست با حاصل ضرب ارتفاع در خط واصل مابین منتصف دو ضلع غیر متوازی

قضیهٔ هشتم

هرگاه خط اح بر دو جزو اب و ب ح قسمت شده باشد پس مربع تمام اح مرکب باشد از مربع قطعه اب باضافهٔ مربع قطعهٔ ب ح باضافهٔ مضاعف مسطح دو قطعهٔ اب و ب ح یعنی چنین $اح^۲$ یا $(اب + ب ح)^۲ = اب^۲ + ب ح^۲ + ۲ . اب × ب ح$



برهان مربع اح د ه را رسم کنید و ار را مساوی اب جدا کنید و د ط را بموازات اح رسم کنید و ب ح را بموازات اه

پس مربع اح د ه بر چهار جزء قسمت میشود جزء اول اب ـ ز مربعی است مرسوم بر اب چونکه ار = اب و جزء دویم ـ ط د ح مربعی است مرسوم بر ب ح چونکه اح = اه و اب = ار پس تفاضل اح ـ اب = تفاضل اه ـ ار و بنابراین ب ح = ه ر و نظر بتوازی اضلاع ـ ط = ب ح و د ط = ه د پس ح ـ ط د مربعی است مرسوم بر ب ح و بعد از وضع این دو جزء از تمام مربع باقی میماند دو مسطح ب ح ـ ط ـ و ه ر ح ـ که مقیاس هر کدام هست اب × ب ح فهو المطلوب

شرح ـ فرض میکنیم ب و ح دو عدد باشند نظیر دو جزو خط اح پس بعمل ضرب جبری این تساوی

نتیجه شود $(\text{ب}+\text{ج})^2 = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + 2\,\text{ب}\,\text{ج}$

و چون مقیاس مسطح را معلوم فرض کنیم این تساوی دلیل دیگر است بر قضیهٔ مذکوره

و در دو قضیهٔ ذیل نیز باید چنین ملاحظه نمود

قضیهٔ نهم

خط اج تفاضل دو خط اب و ب ج است پس مربع اج مرکب باشد از مربع اب باضافهٔ مربع ب ج منهای مضاعف مسطح اب و ب ج یعنی چنین

اج^2 یا $(\text{اب}-\text{بج})^2 = \text{اب}^2 + \text{بج}^2 - 2\cdot\text{اب}\times\text{بج}$

برهان - مربع اب ه د را رسم کنید و اح را مساوی اج جدا کنید و ح ط را بموازات ب ه رسم کنید و ح ک را بموازات اب و مربع ه د ل ک را تمام کنید پس مقیاس دو مسطح ج ب ه ط و ط ل ک ه هر کدام اینست اب × ب ج و بعد از وضع آنها از تمام شکل اب ه ل ک ه اکه مساویست با $\text{اب}^2 + \text{بج}^2$ ظاهر است که باقی میماند مربع اح د ه فهو المطلوب

حکم مذکور بدستور جبری نیز ثابت شود از این قرار $(\text{ب}-\text{ج})^2 = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - 2\cdot\text{ب}\,\text{ج}$

قضیهٔ دهم

مسطح مجموع و تفاضل دو خط اب و ب ج مساویست با تفاضل دو مربع آنها یعنی چنین $(\text{اب}+\text{بج})\times(\text{اب}-\text{بج}) = \text{اب}^2 - \text{بج}^2$

برهان دو مربع اب ه د و اح ه ... را بر اب و اح رسم کنید و اب را امتداد دهید بقدری که ب ل مساوی شود با ب ج و مسطح ا ل ک ه را تمام کنید

پس قاعده الک مسطح بقدر مجموع دو خط اب و ب ح است و ارتفاعش ا ه بقدر تفاضل همان دو خط پس مسطح الکل ه = (اب + ب ح) × (اب − ب ح) و لا این مسطح مرکب است از دو جزء اب ح ه + ب ح ل ک و جزء ب ح ل ک مساویست با مسطح ه د ط ر چونکه ب ح = د ه و ب ک = ه ر پس الکل ه = اب ح ه + ه د ط ر و مجموع مساویست با مربع اب ـ ر منهای مربع د ح ط که رسم شده است بر ب ح

پس خلاصه (اب + ب ح) × (اب − ب ح) = اب^۲ − ب ح^۲

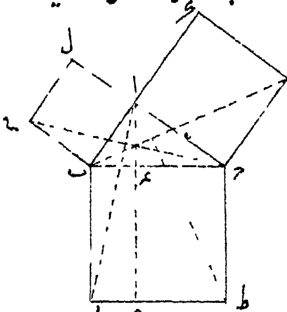
شرح این حکم نیز از دستور جبری استنباط شود باینصورت

(ب − ح) (ب + ح) = ب^۲ − ح^۲

قضیهٔ یازدهم

در مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساویست با مجموع دو مربع دو ضلع دیگر

برهان ـ مثلث اب ح قائم الزاویه است بنقطه ا و بعد از تربیع اضلاع از زاویه قائمه عمود ا د را برون اخراج میکنیم و امتدادش میدهیم تا نقطه ه و دو قطر ا د و ح ح را وصل میکنیم



پس زاویه اب د مرکب است از مجموع زاویه اب ح و زاویه قائمه ح ب د و زاویه ح ب ح مرکب است از همان زاویه اب ح و زاویه قائمه اب ح پس زاویه اب د = ح ب ح و ضلع اب = ب ح چون دو ضلع یکدیگر را تعیند و همچنین ب د = ب ح پس دو مثلث اب د و ح ب ح چون دو ضلع و زاویه بینهما شان متساویست مساوی باشند و مثلث اب د نصف مسطح ب د ه د باشد (و من بعد باختصار مسطح ب ه) که بر همان قاعده ب د و همان ارتفاع ب د است و ۲

وهمچنین مثلث ح ب د نصف مربع اح است چونکه دو زاویه باه و بال قائمه اند و دو جزء اه و ال واقع باشند بر استقامت خطی متوازی با ح ب پس مثلث ح ب د و مربع اح بر قاعده واحده ب ح و بر ارتفاع واحد اب باشند و بنابراین مثلث نصف مربع است

و اول ثابت کردیم که مثلث اب ر مساویست با مثلث ح ب د پس سطح ب ه ر که مضاعف مثلث اب ر است معادل باشد با مربع اح که مضاعف مثلث ح ب د است و بهمین وجه ثابت نمائیم که سطح ح ده ط معادل باشد با مربع اب و از مجموع دو سطح ب ده ر و ح ده ط مربع ب ح ط ر ترکیب شود پس مربع ب ح ط ر مرسوم بر وتر مساویست با مجموع دو مربع اح ل و اب ک مرسوم بر دو ضلع دیگر باینصورت $\overline{بح}^2=\overline{اب}^2+\overline{اح}^2$

وجه دیگر - بعد از تربیع سه ضلع مثلث زاویه ک ب را مساوی ب ح اخراج میکنیم و ح ز را مساوی ح ا جدا میکنیم و نقطه ب را بنقطه ک وصل میکنیم و نقطه ر را بنقطه ه و خط ط ا را وصل میکنیم و امتداد میدهیم تا منتهی شود بنقطه م و حال میگوئیم که چهار ذوات اربعة الاضلاع ط ب ح د و ط ر م ه و اب ح [illegible] و اح ل [illegible] متساوی هستند

تساوی دو شکل اول را باینطور ثابت میکنیم شکل ط ه م ه را دوران میدهیم حول ط م که منصف دو زاویه قائمه ط و م است پس دو ضلع ط ر و ده منطبق شوند بر ط ب و م ح و خط د ه بر ب ح

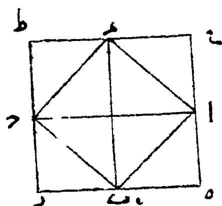
و در اثبات تساوی دو شکل ط ب ح د و اب ح شکل اول را حول نقطه ب دوران میدهیم

تا ب ط واقع شود بر مساوی خود ب ا و ضلع ب ح نظر بتساوی دو زاویه ط ب ح و ا ب واقع شود بر ب ے ونقطه ح بر ے و بالجمله نظر بتساوی دو زاویه ب ے ے و ب ح د خط ح د منطبق شود بر مساوی خود ے ـ

و بهمین وجه ثابت میکنیم که شکل ط ب ح د مساویست با ا ح ك ے

پس چهار ذو اربعه اضلاع متساوی شدند و شکل ط ب ح د ه ر معادل گشت با ا ب ے ـ ك ح و حال چون از یکطرف دو مثلث متساوی را ه و ا ب ح را وضع کنیم و از طرف دیگر دو مثلث ا ب ح و ے ـ ك را باقی بماند مجموع دو مربع ا ب ط د + ا ح د ه مساوی با مربع ب ح ك ے

نتیجه ۱ مربع یکی از دو ضلع مجاور بزاویه قائمه مساویست با مربع وتر منهای مربع ضلع دیگر بدین صورت $\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{بح}}^{2} - \overline{\text{اح}}^{2}$



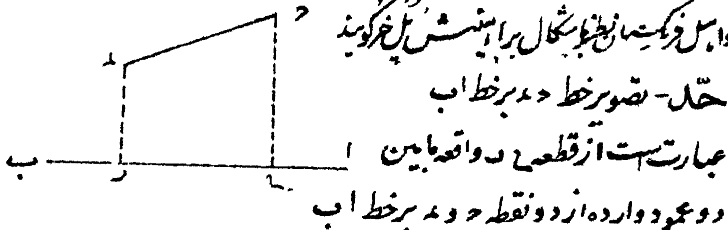
۲ ـ شکل ا ب ح د مربعی است و ا ح قطر آن مربع و مثلث ا ب ح قائم الزاویه است و متساوی الساقین پس $\overline{\text{اح}}^{2} = \overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2}$ $= ۲ \cdot \overline{\text{اب}}^{2}$ پس نتیجه شد که مربع قطر ا ح مضاعف مربع ضلع ا ب است و چون $\overline{\text{اح}}^{2} : \overline{\text{اب}}^{2} = ۲ : ۱$ بعد از استخراج جذر چنین میشود $\text{اح} : \text{اب} = \sqrt{۲} : ۱$ یعنی در شکل مربع قطر و ضلع متباین باشند

۳ ـ در وجه اول ثابت شد که مربع ا ے معادلست با سطح ب د ه د و نظر باشتراک ارتفاع ب د مربع ب ح ط ر نسبت بسطح ب د ه ر مثل قاعده ب ح است بقاعده ب د

پس $\overline{\text{بح}}^{2} : \overline{\text{اب}}^{2} = \text{بح} : \text{بد}$

یعنی که مربع وتر زاویه قائمه نسبت بمربع یکی از دو ضلعش مثل طول وتر است بقطعه

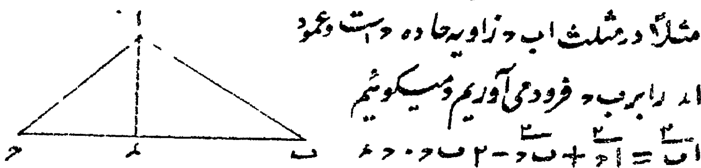
مجاوره بهمان ضلع و قطعه عبارت از آن جزو وتر است که تحدید شده باشد بعمود عاج
از زاویه قائمه و از اینقرار ب د قطعه مجاوره بضلع اب است و د ح قطعه مجاوره بضلع
اح و از اینقرار ف $\overline{ح}^2$: $\overline{اح}^2$ = ب ح : ح د
ع۴ - دو سطح ب د ه ر و د ح ط ه نیز بر یک ارتفاع عند و بنا بر این بر نسبت دو قاعده
ب د و ح د و چون این دو شکل معادلند با دو مربع $\overline{اب}^2$ و $\overline{اح}^2$ پس $\overline{اب}^2$: $\overline{اح}^2$ =
ب د : د ح یعنی که مربع دو ضلع بزاویه قائمه بر نسبت دو قطعه وتر اند که مجاور
آن دو ضلع باشند تنبیه مثلث قائم الزاویه نظر باهمه خواص فوق شکل عروس گویند
و اسم و یکه بعضی از اشکال بر این نشان لِم خر گویند



حل - تصویر خط ح د بر خط اب
عبارت است از قطعه ر ط واقعه مابین
دو عمود وارده از دو نقطه ح و د بر خط اب

قضیه دوازدهم

در هر مثلث مربع ضلع مقابل بزاویه حاده مساویست با مجموع مربعین دو ضلع
دیگرمنهای مضاعف مسطح یکی از آندو ضلع در تصویر ضلع دیگر بر همین ضلع



مثلا در مثلث اب ح زاویه حاده ح است و عمود
اد را بر ب ح فرود می آوریم و میگوئیم
$\overline{اب}^2 = \overline{اح}^2 + \overline{بح}^2 - ۲ بح . حد$

برهان این شکل دو حالت دارد اول آنکه عمود داخل مثلث اب ح واقع شود پس بد
= ب ح - ح د و بنا بر این ف۹ $\overline{بد}^2 = \overline{بح}^2 + \overline{حد}^2 - ۲ بح . حد$ و چون
بر طرفین تساوی $\overline{اد}^2$ اضافه کنیم و ملاحظه نمائیم که در دو مثلث قائم الزاویه اب د

و از این دو تساوی حاصل است $\text{اه}^2 + \text{به}^2 = \text{اب}^2$ و $\text{اه}^2 + \text{هج}^2 = \text{اج}^2$

معادله اول چنین شود $\text{اب}^2 = \text{بج}^2 + \text{اج}^2 - ۲\ \text{جب} \times \text{جه}$

حالت دوم آنستکه عمود اه خارج مثلث ابج واقع شود پس به = جه − بج و بنابر این ق ۹

$\text{به}^2 = \text{جه}^2 + \text{بج}^2 - ۲\ \text{جه} \times \text{بج}$ و چون

برطرفین اه^2 بیفزائیم بطریق سابق چنین میشود $\text{اب}^2 = \text{بج}^2 + \text{اج}^2 - ۲\ \text{بج} \times \text{جه}$

قضیه سیزدهم

در هر مثلث منفرج الزاویه مربع ضلع مقابل بزاویه منفرجه مساویست بمجموع دو مربع دو ضلع دیگر با اضافه مضاعف مسطح یکی از آن دو ضلع در تصویر ضلع دوم بر همین ضلع

مثلا ضلع اب مقابل بزاویه منفرجه ج از مثلث ابج پس اه را بر بج عمود کنیم و گوئیم

$\text{اب}^2 = \text{اج}^2 + \text{بج}^2 + ۲\ \text{بج} \times \text{جه}$

برهان - عمود مذکور ممکن نیست در داخل مثلث واقع شود زیرا اگر مثلا بر نقطه ه واقع میشد آنوقت مثلث اجه دارا میشد زاویه قائمه ه و زاویه منفرجه ج را و این محال است پس باید در خارج واقع شود و بنابراین به = بج + جه و بعد از ان ق ۸ $\text{به}^2 = \text{بج}^2 + \text{جه}^2 + ۲\ \text{بج} \times \text{جه}$ و چون برطرفین تساوی اه^2 اضافه کنیم و تصرف شکل سابق را در آن نمائیم چنین شود $\text{اب}^2 = \text{بج}^2 + \text{اج}^2 + ۲\ \text{بج} \times \text{جه}$

شرح - مثلث قائم الزاویه تنها دارای این خاصیت است که مجموع دو مربع دو ضلعش مساوی باشد با مربع ضلع سیم زیرا که اگر زاویه واقعه مابین آن دو ضلع حاده باشد مجموع آن دو مربع

اعظم باشد از مربع ضلع مقابل و اگر منفرجه باشند اصغر باشد از آن مجموع

قضیهٔ چهاردهم

در هر مثلث مثل ابج چون خط اه از راس ا بر وسط قاعده وصل کنیم این حکم محقق شود

$$\text{اب}^2 + \text{اج}^2 = 2\,\text{اه}^2 + 2\,\text{به}^2$$

برهان عمود اد را بر قاعده بج فرود آورید آنوقت بنا بر ق(۱۲) در مثلث اهج این تساوی نتیجه شود

$$\text{اج}^2 = \text{اه}^2 + \text{هج}^2 - 2\,\text{هج} \times \text{هد}$$

و در مثلث ابه بنا بر ق(۱۳) این تساوی

$$\text{اب}^2 = \text{اه}^2 + \text{به}^2 + 2\,\text{به} \times \text{هد}$$

و بعد از جمع دو تساوی و ملاحظه اینکه هب = هج چنین شود

$$\text{اب}^2 + \text{اج}^2 = 2\,\text{اه}^2 + 2\,\text{به}^2$$

قضیهٔ پانزدهم

در هر ذوار بعة الاضلاع مجموع مربعات چهار ضلعش مساویست با مجموع دو مربع دو قطر با اضافه چهار برابر مربع خط واصل مابین منتصف دو قطر

برهان اج و بد دو قطر ذوار بعة الاضلاع ابجد است و ه و ط دو نقطهٔ وسط قطر خطوط به و ده و هط را وصل میکنیم آنوقت بنا بر قضیهٔ سابقه در مثلث ابج

$$\text{اب}^2 + \text{بج}^2 = 2\,\text{به}^2 + 2\,\text{اه}^2$$ و در مثلث اجد $$\text{اد}^2 + \text{جد}^2 = 2\,\text{ده}^2 + 2\,\text{اه}^2$$

و بعد از جمع $$\text{اب}^2 + \text{بج}^2 + \text{اد}^2 + \text{جد}^2 = 2\,(\text{به}^2 + \text{ده}^2) + 4\,\text{اه}^2$$ و چون

در مثلث ب ه د $\overline{\text{به}}^2 + \overline{\text{ده}}^2 = 2\cdot\overline{\text{بط}}^2 + 2\cdot\overline{\text{هط}}^2$

پس $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دج}}^2 = 4\,\overline{\text{بط}}^2 + 4\cdot\overline{\text{هط}}^2 + 4\cdot\overline{\text{اه}}^2$

و چون $\overline{\text{بد}}^2 = 4\,\overline{\text{بط}}^2$ و $\overline{\text{اج}}^2 = 4\,\overline{\text{اه}}^2$ پس

$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دج}}^2 = 4\cdot\overline{\text{هط}}^2 + \overline{\text{بد}}^2 + \overline{\text{اج}}^2$

نتیجه ۱ — اگر ذو اربعة اضلاع مذکوره متوازی الاضلاع باشد خط ط ه معدوم میشود پس چنین نتیجه میشود که در هر ذو اربعة اضلاع مجموع مربعات چهار ضلع مساوی باشد بمجموع دو مربع دو قطر و عکس چنین حکم نیز صحیح است.

در تشابه اشکال قضیهٔ بیستم خطوط متناسبه

هر خط که بموازات یکی از اضلاع مثلث رسم شود دو ضلع دیگرش را بیک نسبت قطع کند

برهان — ده خطی است موازی با قاعده ب ج از مثلث اب ج و اول فرض میکنیم که دو خط اد و دب مقیاس مشترکی داشته باشند و آن سه مرتبه در اد بگنجد و دو مرتبه در دب و این تناسب نتیجه میشود اد : دب = ۳ : ۲

و بر نقاط تقسیم اب خطوطی بموازات ب ج رسم میکنیم و بر نقاط م و ن و ه و ل خطوطی بموازات اب پس جمیع مثلثات ا ك م و م ع ن و غیره نظر بتساوی یک ضلع و دو زاویه طرفین متساوی باشند مثلاً در دو مثلث م ع ن و ن س ه دو زاویه م ع ن و ن س ه نظر بتوازی اضلاعشان متساوی باشند و نیز دو ضلع م ع و ن س نظر بتساویشان با دو خط ك ف و د ف متساوی باشند

پس از تساوی این مثلثات چنین نتیجه میشود که ام = م ن = ن ه = ه ل = ل ج

وچون اه دارای سه جزو از این اجزاء است و هح دارای دو جزو پس اه : هح = ۳ : ۲
وبعد از مقایسه این تناسب با تناسب سابق چنین نتیجه میشود اد : دب = اه : هح
واگر دو خط اد و دب اصم باشند ومقیاس مشترک نداشته باشند باید بطریق ۲۱۸
پیش رفت وثابت نمود که همواره اندو خط بر نسبت اه و هح است
نتیجه ۱ - بترکیب تناسب مذکور این تناسب نتیجه میشود اد : اد + دب = اه : اه + هح
یا اد : اب = اه : اح
ونیز اد + دب : دب = اه + هح : هح یا اب : دب = اح : هح

نتیجه ۲ - در دو خط اب و دح اجزاء مفروزه بخطوط متوازیه اح و هر و طح و ب د وغیره متناسب باشند زیرا که چون دو خط اب و ح د را امتداد دهیم تا بر نقطه ب متقاطع شوند در مثلث ب ه ر خط اح موازیست با قاعده ه ر وآنوقت
ب ه : ب ر = اه : حر ونیز در مثلث ب طح این تناسب نتیجه میشود
ب ه : ب د = ه ط : رح وبعد از وضع نسبت مشترکه این تناسب

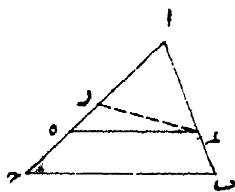
اه : حر = ه ط : رح

وهمچنین ثابت میکنیم

ه ط : رح = طب : ح د

قضیه هفدهم

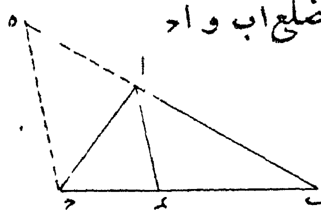
وبالعکس اگر در مثلث اب ح دو ضلع اب و اح را خط ده چنان قطع نموده باشد که اد : دب = اه : هح یعنی بر نسبت واحد پس خط قاطع ده بموازات قاعده ب ح باشد



برهان اگر گوید ده موازی نیست با ب ح فرض میکنیم
دو بموازات آن باشد و آنوقت بحکم شکل سابق اد : دب
= او : وح و بنابر فرض اد : دب = اه : هح
پس نظر بنسبت مشترکه او : وح = اه : هح و
بعد از تبدیل او : اه = وح : هح و این تناسب صحیح نیست چونکه از طرفی تالی اه اعظم است از
او و از طرفی تالی هح اصغر است از وح پس خطی که از نقطه د بموازات ب ح رسم
شود منطبق خواهد شد بر ده یعنی این خط قاطع موازی ب ح است با قاعده مثلث
شرح - اگر خط قاطع این تناسب بدست اید اب : اد = اح : اه باز حکم مذکور
صحیح است زیرا که بعد از تفصیل چنین شود اب - اد : اد = اح - اه : اه
یا چنین ب د : اد = حه : اه

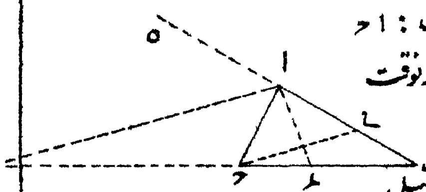
قضیهٔ هیجدهم

در مثلث اب ح اولاً خط اد منصف زاویه ا قاعده ب ح را قطع کند
بدو جزء ب د و دح متناسب با دو ضلع اب و اح
وثانیاً خط او منصف زاویه خارجه ح اه تحدید کند در امتداد قاعده
دو قطعه ب و و ح و را بر نسبت دو ضلع اب و اح



برهان حکم اول بر نقطه ح خط حه را بموازات
اد رسم کنیم تا استقامت ب ا را بر ه قطع کند
آنوقت در مثلث ب ح ه خط اد موازیست با
قاعده حه و این تناسب نتیجه شود که ب د : دح = ب ا : اه
ولی مثلث اح ه متساوی الساقین است زیرا که نظر بتوازی دو ضلع اد و حه زاویه

اه = ءاح و زاویه اه ح = ب اء و بنابر فرض ءاح = ب اء پس زاویه
اه = اه ح و بنابراین اه = اح حال چون در تناسب سابق اه را بجای اه قرار
دهیم چنین میشود ب ء : ء ح = اب : اح



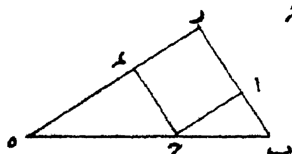
مرتبها حکم تا ثانی ح ع را بموازات دا رسم کنید توقف
در مثلث ب اد این تناسب حاصل میشود
ب ء : ء ح = ب ا : اع و مثلث اع ح بدلیل
سابق متساوی الساقین است یعنی اع = اح پس ب ء : ء ح = اب : اح
نتیجه چون نقطه ا در سطح مثلث سیر کند بر وجهی که نسبت اب به اح ثابت و برقرار باقی
ماند و آنرا $\frac{م}{ن}$ فرض میکنیم دو خطی که در هر موضع ا دو زاویه ب اح و ه اح را نصف
کند همواره مرور نمایند بر همان دو نقطه شخصیه ء و د زیرا که دو نسبت $\frac{بء}{ءح}$ و $\frac{بد}{دح}$
باز مساوی هستند با $\frac{م}{ن}$ و با یحالت برقرار و چون دو خط اء و اد منصف دو زاویه
مجاوره پیوسته بر یکدیگر عمود اند پس نقطه ا در جمیع حرکاتش باید واقع شود بر محیط دایره
که بر قطر ءد رسم شود و بنابراین مکان هندسی نقاطی که دو فاصله ایشان از جمیع
از دو نقطه ب و ح بر نسبت مفروض ثابتی باشد دایره است
حد مثلث متشابهه آنانند که زوایا شان متساوی باشند و اضلاع متناظره ایشان
متناسب مقصود از اضلاع متقابله و متناظره آنها است که مقابل باشند بزوایای متساویه
ذو کثیرة الاضلاع متشابهه آنانند که زوایاشان نظیر بنظیر متساوی باشد و اضلاع متقابلشان
متناسب مقصود از اضلاع متقابله آنها است که مقابل باشند بزوایای متساویه

قضیه نوزدهم

در دو مثلث متساویة الزوایا اضلاع متناظره متناسب باشند

مثلاً

مثلاً دو مثلث مفروض ا ب ج است و ج د ه
که زوایاشان نظیر بنظیر متساویست از اینقرار ب ا ج = ج د ه و ا ب ج = د ج ه و ا ج ب = د ه ج
و میگوئیم که اضلاع متناظره از اینقرار متناسبند



ب ج : ج ه = ا ب : د ج = ا ج : د ه

برهان دو ضلع متناظر ب ج و ج ه را بر یک استقامت قرار میدهیم و دو ضلع ب ا و ه د را امتداد میدهیم تا بر نقطهٔ و متلاقی شوند
آنوقت چون خط ب ج ه مستقیم است و زاویهٔ ب ج ا = ج ه د ضلع ا ج موازی میشود با د ه و (۲۳) و همچنین چون زاویهٔ ا ب ج = د ج ه خط ا ب موازیست با ج د
پس شکل ا ج د و متوازی الاضلاع است
در مثلث ب و ه خط ا ج موازیست با قاعدهٔ و ه و بنا براین (۳۱) ب ج : ج ه = ب ا : ا و و چون بجای ا و مساویش ج د را قرار دهیم چنین شود

ب ج : ج ه = ب ا : ج د

در همان مثلث ب و ه چون ضلع ب و را قاعده فرض کنیم خط ج د موازیست با آن و بنا براین ب ج : ج ه = و د : د ه و چون بجای و د مساویش ا ج را قرار دهیم چنین میشود ب ج : ج ه = ا ج : د ه
پس نظر بنسبت مشترکهٔ ب ج : ج ه از دو تناسب مذکور این تناسب نتیجه میشود

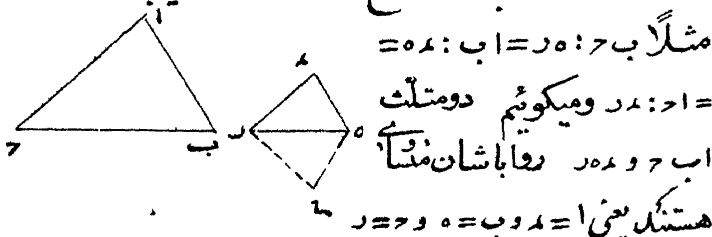
ا ج : د ه = ب ا : ج د

پس دو مثلث متساوی الزوایای ب ا ج و ج د ه اضلاع متقابلشان متناسب شد و بنا بر تعریف سابق متشابه باشند

نتیجه - پس شرط تشابه دو مثلث همین کافیست که دو زاویه اش نظیر بنظیر متساوی باشد زیرا که آنوقت زاویه سیم آنها نیز متساوی میشود و بعد اضلاع متناسب

قضیه بیستم

دو مثلث متناسب الاضلاع متساوی الزوایا باشند



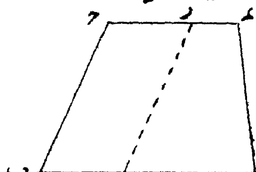
مثلاً ب ح : ه د = ا ب : ط ه = ا ح : ط د ومیگوئیم دو مثلث ا ب ح و ط ه د روابا شان متساوی هستند یعنی ا = ط و ب = ه و ح = د

برهان - بر نقطه ه زاویه ده ح را مساوی ب رسم میکنیم و بر نقطه د زاویه ه د ح را مساوی ح و زاویه سیم ح خود مساوی شود با ا و دو مثلث ا ب ح و ه د ح متساوی الزوایا کردند پس بنا بر قضیه سابقه ب ح : ه د = ا ب : ه ح و بنا بر فرض ب ح : ه د = ا ب : ط ه و در این دو تناسب چون سه جمله مشترک است پس ه ح = ه ط و نیز بنا بر همان قضیه ب ح : ه د = ا ح : د ح و بنا بر فرض ب ح : ه د = ا ح : ط د پس د ح = د ط پس اضلاع دو مثلث ه ح د و ه ط د نظیر بنظیر متساوی باشند و این دو مثلث متساوی و ۱۲ او ا و بعمل مثلث ه ح د را متساوی الزوایا ساختیم با مثلث ا ب ح پس دو مثلث ط ه د و ا ب ح نیز متساوی الزوایا باشند

شرح ۱ باید ملتفت شویم که زوایای متساویه دو مثلث مقابل باشند با اضلاع متناسبه

۲ - از این دو شکل چنین استنباط شد که تساوی زوایا لازم دارد تناسب اضلاع را و بالعکس تناسب اضلاع تساوی زوایا را بر وجهیکه در تحقق تشابه مثلثات وجود یکی از این دو شرط کافی باشد ولی این خاصیت مختص بمثلث باشد و در سایر اشکال که عدد

اضلاعشان از نسبت تجاوز نکند چنین نیست مثلاً در ذو اربعه اضلاع میتوان بدون تغییر زوایا
نسبت اضلاع را تغییر داد و نیز بدون تغییر اضلاع مقدار زوایا را تغییر داد و از استقرار



از تساوی زوایا تناسب اضلاع لازم نیاید و نه عکس آن
چنانچه اگر ه د را بموازات ب ح رسم کنیم زوایای
ذو اربعه اضلاع ا ه د ء مساوی باشند با زوایای
ذو اربعه اضلاع ا ب ح ء ولی اضلاع بر یک نسبت نباشند و نیز بدون تغییر چهار ضلع
ا ب و ب ح و ح ء و ء ا میتوان دو زاویه ب و ء را دور و نزدیک نمود و مقادیر
جمیع زوایا را تغییر داد

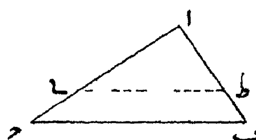
شرح ۳ — چون دو قضیه مذکور را که حکم یک شکل دارند ترکیب کنیم با شکل عروس این
احکام مفیدتر و کثیر الاستعمال تر جمیع احکام اصول هندسه باشند و بتوان گفت که از روی
همین دو سه حکم جمیع مسائل حل شوند و در عملیات ما را کفایت کنند و نکته اش اینست که
هر شکل را میتوان بمثلثات قسمت نمود و هر مثلث را بدو مثلث قائم الزاویه و از اینقرار خواص
کلیه مثلثات ضمناً دارا باشند خواص جمیع اشکال را

قضیه بیست و یکم

هرگاه در دو مثلث یک زاویه مساوی باشد و دو ضلع طرفین
متناسب اند و مثلث متشابه باشند



فرض میکنیم زاویه ا = د و نسبت ا ب : د ه = ا ح :
د و و میگوئیم مثلث ا ب ح شبیه است بمثلث د ه و



برهان ا ط را مساوی د ه جدا میکنیم و ط ی را بموازات
ب ح رسم میکنیم پس زاویه ا ط ی مساوی شود بزاویه

اب ج و ۲ و ۱ و مثلث اطی زوایایش مساوی میشود بازوایای مثلث اب ج پس
اب : اط = اج : ای ولی بفرض اب : ده = اج : دو بعمل اط = ده پس این دو
تناسب در سه جمله مشترکند و بنابراین ای = دو پس در دو مثلث اطی و ده و
دو ضلع و زاویه بینهما متساوی است و این دو مثلث متساوی باشند و چون مثلث
اطی شبیه است بمثلث اب ج پس ده و نیز شبیه باشد بمثلث اب ج

قضیه بیست و دوم

هر دو مثلث که اضلاعشان متوازی باشند یا عمود بر همدیگر متشابهند
برهان فرض میکنیم ا و ب و ج زوایای یکی از دو مثلث باشد و ا' و ب' و ج' زوایای
مثلث دیگر

و میدانیم که اضلاع دو زاویه هرگاه متوازی باشند یا عمود نسبت بهم اند و زاویه متساوی
باشند یا متمم همدیگر پس فرضهای ممکنه منحصر باشد در یکی از این سه صورت

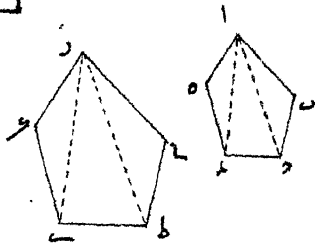
اولاً ا + ا' = ۲ق و ب + ب' = ۲ق و ج + ج' = ۲ق
ثانیاً ا + ا' = ۲ق و ب + ب' = ۲ق و ج = ج'
ثالثاً ا = ا' و ب = ب' و بنابراین ج = ج'

بر فرض اول مجموع زوایای دو مثلث مساوی میشود بشش قائمه
و بر فرض دوم مجموع از چهار قائمه تجاوز کند

پس همان فرض سیم صحیح و معقول باشد و بنابراین دو مثلث متساوی الزوایا و آنوقت متشابه
تنبیه در این شکل اضلاع متناظره دو مثلث آنها باشند که متوازیند یا عمود بر همدیگر

قضیه بیست و سیم

دو کثیر الاضلاع متشابه را میتوان قسمت کرد بعددی از مثلثات متشابه و متشابه الوضع



برهان در کثیر الاضلاع ا ب ج د ه از زاویه ا
دو قطر ا ج و ا د را بزوایای غیر مجاوره وصل
میکنیم و در کثیر الاضلاع دیگر ز ح ط ی ک
نیز همچنان از زاویه نظیر ا دو قطر ز ط و ز ی
را وصل میکنیم آنوقت نظر بتشابه دو کثیر الاضلاع
زاویه ا ب ج = نظیر خود ز ح ط و دو ضلع ا ب و ب ج متناسب باشند با نظیر خود ز ح و
ح ط یعنی ا ب : ز ح = ب ج : ح ط یعنی در آن دو مثلث یکزاویه مساویست و دو ضلع
طرفین متناسب پس متشابه باشند و زاویه ب ج ا مساوی شود با ح ط ز و چون این دو
زاویه متساویه را وضع کنیم از دو زاویه متساویه ب ج د و ح ط ی باقی میماند ا ج د = ز ط ی
و حال ذکر شد که نظر بتشابه دو مثلث ا ب ج و ز ح ط نسبت ا ج : ز ط = ب ج : ح ط
و نظر بتشابه دو کثیر الاضلاع ب ج : ح ط = ج د : ط ی پس بسبب اشتراک نسبت ا ج :
ز ط = ج د : ط ی و قبل از این ملاحظه شد که زاویه ا ج د = ز ط ی پس دو مثلث ا ج د
و ز ط ی نیز دارای یکزاویه مساوی و دو ضلع طرفین متناسب اند و بنا بر این متشابه باشند
و بهمین وجه ثابت میکنیم که سایر مثلثات هم بترتیب متشابه اند و از این قرار دو کثیر الاضلاع
متشابه مرکب باشند از عده واحده از مثلثات متشابهه و متشابهة الوضع

شرح - عکس قضیه مذکوره نیز صحیح است یعنی اگر دو کثیر الاضلاع مرکب باشند
از یک عده از مثلثات متشابهه و متشابهة الوضع متشابهند
زیرا که از تشابه مثلثات متشابهه نتیجه میشود که ا ب ج = ز ح ط و ب ج ا = ح ط ز و
ا ج د = ز ط ی پس ب ج د = ح ط ی و همچنین ج د ه = ط ی ک و غیره و علاوه بر آن
از تناسب اضلاع مثلثات این تناسب مسلسل نتیجه شود ا ب : ز ح = ب ج : ح ط

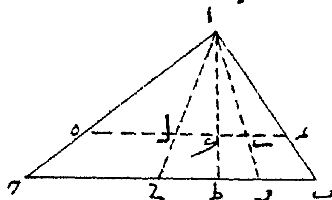
= اح : دط = حه : طب وغیره پس زوایای ع و کثیرالاضلاع متساوی شدند واضلاعشان متناسب و بنابراین متشابهند

قضیهٔ بیست و چهارم

خطوط اد و اط وغیره که از راس مثلث بقاعده اش بج وصل شوند قاعده و موازیش ده را بیک نسبت قطع کنند و این تناسب نتیجه شود

هب : بد = هک : دط = کل : طع وغیره

برهان خط هب چون موازیست با بد دو مثلث اهب و ابد متساوی الزوایا باشند و بنابراین هب : بد = اه : اد و همچنین نظر بتوازی هک و دط این تناسب حاصل شود اه : اد = هک : دط



و بسبب اشتراک نسبت اه : اد این تناسب حاصل شود هب : بد = هک : دط

و بهمان وجه این تناسب حاصل شود هک : دط = کل : طع و بکذا پس خط ده قسمت شده است بر نقاط ک و ل بر همان نسبت که خط بج بر نقاط د و ط و ع قسمت شده

نتیجه — پس اگر بج را بر نقاط د و ط و ع باجزای متساویه قسمت کنیم موازیش ده نیز باجزای متساویه قسمت شود بر نقاط ک و ل و ل

قضیهٔ بیست و پنجم

چون از زاویه قائمه ا از مثلث قائم الزاویه باج عمود اد را بر وتر اخراج کنیم گوئیم

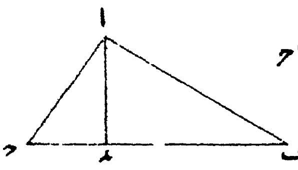
اولاً دو مثلث جزء ابد و ادج متشابهند و مشابهند با مثلث کل

ثانیاً هر کدام از دو ضلع اب و اج واسطه هندسی باشند ما بین وتر بج

وقطعهٔ مجاورهٔ خود ب د یا د ح

ثالثاً عمود ا د واسطه هندسی باشد مابین دو قطعهٔ ب د و د ح

برهان اولاً دو مثلث ب ا د و ب ا ح مشارکند



درزاویه ب وعلاوه برآن دو زاویه ب د ا و ب ا ح

قائمه اند پس زاویه سیم ب ا د از مثلث اول مساوی

باشد بازاویه ح از مثلث دیگر وایندو مثلث متساوی

الزوایا باشند و متشابه و بهمین وجه ثابت میکنیم که مثلث د ا ح شبیه است بمثلث

ب ا ح پس این ۳ مثلث متساوی الزوایا باشند و متشابه

ثانیاً چون مثلث ب ا د شبیه شد بمثلث ب ا ح اضلاع متناظر شان متناسب باشند

وضلع ب د از مثلث کوچک نظیر با ب ا از مثلث بزرگ چون مقابلند بدو زاویه

متساویه ب ا د و وتر ب ا از مثلث کوچک نظیر است با وتر ب ح از مثلث بزرگ

پس این تناسب صورت بندد ب د : ب ا = ب ا : ب ح وهمچنین د ح : ا ح =

ا ح : ب ح پس معلوم شد که هر کدام از دو ضلع ا ب و ا ح واسطه هندسی باشند

مابین وتر و قطعه مجاوره خود

ثالثاً - بمشابهت دو مثلث ا ب د و ا د ح و مقابله اضلاع متناظره آنها این تناسب

حاصل شود ب د : ا د = ا د : د ح پس عمود ا د واسطه هندسی باشد مابین دو قطعه ب د و د ح

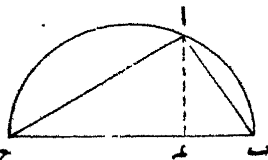
شرح - در تناسب ب د : ا ب = ا ب : ب ح چون سطح طرفین با معاول کنیم با سطح وسطین

چنین میشود $\overline{اب}^2$ = ب د × ب ح وهمچنین $\overline{اح}^2$ = د ح × ب ح وبعد از جمع دو متساوی

$\overline{اب}^2 + \overline{اح}^2$ = ب د × ب ح + د ح × ب ح و جزء ثانی باینصورت تحویل میشود (ب د + د ح)

× ب ح = ب ح × ب ح = $\overline{بح}^2$ پس $\overline{اب}^2 + \overline{اح}^2 = \overline{بح}^2$ یعنی مربع وتر ب ح مساویست

با مجموع دو مربع دو ضلع دیگر اب و اح پس بوجه بسیار دور باز رسیدیم بشکل عروس پس معلوم میشود که در مثلثات متساویة الزوایا خاصیت شکل عروس لازمهٔ تناسب اضلاع است



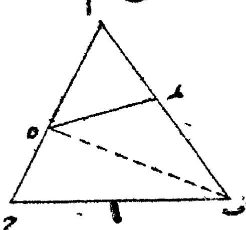
نتیجه چون از نقطه ا محیط دایره دو وتر اب و اح را بطرفین قطر ب ح وصل کنیم مثلث ب ا ح قائم الزاویه میشود بر نقطه ا (۱۹ او۲)

پس اولاً عمود ا د واسطهٔ هندسی باشد ما بین دو قطعه ب د و د ح قطر دایره و بعبارت اخری مربع اد مساوی باشد با سطح ب د × د ح

ثانیاً وتر اب واسطهٔ هندسی باشد ما بین قطر ب ح و قطعه ب د و بعبارت اخری $اب^2 =$ ب د × ب ح و همچنین $اح^2 =$ ح د × ح ب پس $اب^2 : اح^2 =$ ب د : د ح وچون $اب^2$ را به $بح^2$ بسنجیم این تناسب نتیجه شود $اب^2 : بح^2 =$ ب د : ب ح و هکذا $اح^2 : بح^2 =$ د ح : ب ح و این نسب همان نتایج است که سابق در قضیهٔ ۱۱ ذکر شد

قضیهٔ بیست و ششم

هر دو مثلث که دارای یک زاویهٔ مساوی باشند نسبتشان بهمدیگر مثل دو سطح اضلاعی است که حاوی آن زاویه اند مثلاً نسبت مثلث اب ح بمثلث ا د ه مثل سطح اب × اح باشد بسطح ا د × ا ه



برهان ب ه را وصل کنید آنوقت دو مثلث اب ه و ا د ه مشارکند در رأس ه و بر امتداد یک خط اند پس بر نسبت دو قاعده اب و ا د باشند بدین صورت

اب ه : اد ه = اب : اد   وبهمانوجه این تناسب حاصل شود

اب ج : اب ه = اج : اه

وبعد از ضرب دو تناسب و حذف جمله مشترکه اب ه این تناسب حاصل شود

اب ج : اد ه = اب × اج : اد × اه

نتیجه – پس اگر سطح اب × اج مساوی باشد با سطح اد × اه وبعبارت اخری اب : اد = اه : اج دو مثلث معادل همدیگر میشوند واینحالت وقتی اتفاق افتد که خط دج موازی شود با به

قضیه بیست و هفتم

دو مثلث متشابه بر نسبت دو مربع هر دو ضلع متناظر باشند

برهان – زاویه ا = د وزاویه ب = ه

پس اول نظر بتساوی زاویه ا و د بنابر قضیه سابقه

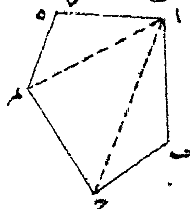
اب ج : د ه ر = اب × اج : ده × در

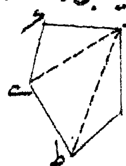
وآنرا بدل کنیم باین صورت $\frac{ابج}{دهر} = \frac{اب}{ده} \times \frac{اج}{در}$

ونظر بتشابه دو مثلث این تساوی حاصل شود $\frac{اج}{در} = \frac{اب}{ده}$ پس $\frac{ابج}{دهر} = \frac{اب}{ده} \times \frac{اب}{ده} = \frac{\overline{اب}^2}{\overline{ده}^2}$

قضیه بیست و هشتم

دو کثیر الاضلاع متشابه و محیط بر نسبت هر دو ضلع متناظر اند و دو سطح بر نسبت دو مربع اند دو ضلع





برهان اولا بنابر تعریف اشکال متشابهه

اب : بج = طل : لح ط =

= د ه : ط ـ وغیره و از ترکیب این نسب متساویه چنین استنباط شود که نسبت مجموع
مقدمات اب + ب ح + ح د .... یعنی محیط شکل اول بمجموع توالی ی ح + ح ط +
ط ـ وغیره یعنی محیط شکل ثانی مثل یکی از مقدمات است بتالی خود مثل اب : ی ح
ثانیاً - نظر بتشابه دو مثلث اب ح و ی ح ط این تناسب حاصل شود (۲۷)
اب ح : ی ح ط = اح^۲ : ی ط^۲ وهکذا در دو مثلث اح د و ی ط ـ این تناسب
ی ط ـ = اح^۲ : ی ط^۲ و بسبب اشتراک نسبت اح^۲ : ی ط^۲ این تناسب حاصل شود
اب ح : ی ح ط = اح د : ی ط ـ وبهمان نوجه ثابت میکنیم که اح د : ی ط ـ = اد ه :
ی ـ ل وهکذا در آنصورت که عدد مثلثات از سه تجاوز کند پس بترکیب تناسب اخر
نسبت مجموع مقدمات اب ح + اح د + اد ه .... یعنی مساحت کثیر الاضلاع
اب ح د بمجموع توالی ی ح ط + ی ط ـ + ی ـ ل .... یعنی مساحت کثیر الاضلاع
دوم مثل مقدم اب ح است بتالی خود ی ح ط یا مثل اب^۲ : ی ح^۲
پس سطوح کثیر الاضلاع متشابه بر نسبت مربع هر دو ضلع متناظر باشند
نتیجه - هرگاه سه شکل متشابه ترتیب دهیم بروجهی که سه ضلع متناظرشان سه
ضلع مثلث قائم الزاویه باشد پس شکل مرسوم بر ضلع طول مثلث مساوی باشد
با مجموع دو شکل مرسوم بر دو ضلع دیگر مثلث زیراکه این سه شکل بر نسبت مربعات
اضلاع متناظره اند و یکی از این مربعات مساویست با مجموع دو مربع دیگر فهو المطلوب

قضیه بیست و نهم

در دایره اح ب د اجزای دو وتر متقاطع اب و ح د متناسب باشند
بر تناسب معکوس باینصورت اه : د ه = ح ه : ه ب
برهان - دو خط اح و ب د وصل کنیم آنوقت در دو مثلث اح ه و ب ه د

دو زاویهٔ ه چون متقابله برأس اند متساوی باشد و دو زاویهٔ ا و د چون محیطه اند و واقع در یک قطعه متساوی باشند (۹ا و ۳) و همچنین دو زاویهٔ ح و ب پس این دو مثلث متشابه باشند و اضلاع متناظره متناسب باینصورت

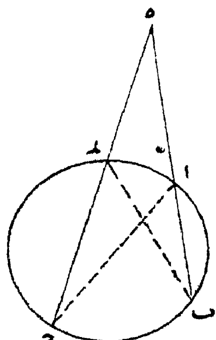
ا ه : د ه = ح ه : ه ب

نتیجه - از تناسب مذکور این تساوی نتیجه شود ا ه × ه ب = د ه × ح ه یعنی که مسطح دو جزو وتری مساویست با مسطح دو جزو وتر دیگر

قضیهٔ سی ام

چون از نقطهٔ ه واقعه در خارج دائره دو خط قاطع ه ب و ه ح را رسم کنیم و منتهی غایتهٔ هر دو را بقوس مقعر ب ح پس تمام اند و خط متناسب باشند بر نسبت عکس با دو جزو خارجی خود بر وجهی که این تناسب صورت گیرد

ه ب : ه ح = ه د : ه ا



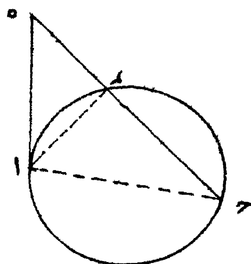
برهان چون دو خط ا ح و ب د را وصل کنیم دو مثلث ه ا ح و ه د ب مشارک باشند در زاویهٔ ه و علاوه بر آن زاویهٔ ب = ح (۱۹ و ۲) پس متشابه باشند و اضلاع متقابله آنها متناسب باینصورت ه ب : ه ح = ه د : ه ا

نتیجه - از تناسب مذکور چنین نتیجه میشود که مسطح ه ا × ه ب مساویست با مسطح ه ح × ه د

شرح - دو شکل مذکور کمال مشابهت دارند و اختلافی ندارند جز از این حیثیت که در شکل اول تقاطع دو وتر ا ب و ح د در داخل دایره واقع شده و در شکل ثانی در خارج

قضیهٔ سی و یکم ۳۱

چون از نقطهٔ ه واقعه در خارج دایره خط ه ا را مماس کنیم و ه ح را قاطع خط مماس واسطه هندسی باشد مابین قاطع عام و جزو خارجی خود بنوعی که این تناسب حاصل شود ه ح : ه ا = ه ا : ه د و بعبارت اخری $\overline{ه ا}^2$ = ه ح × ه د

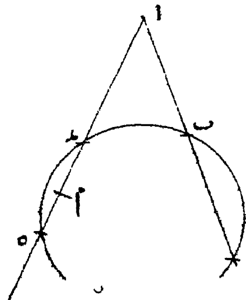


برهان بعد از وصل دو خط ا د و ا ح دو مثلث ه ا د و ه ا ح مشارک میشوند در زاویه ه و علاوه بر آن زاویه ه ا د حادثه مابین مماس و وتر مقیاسش نصف قوس ا د است (ق ۲۰ و ۲) و زاویه ح نیز بهمان مقیاس است پس زاویه ح = ه ا د پس دو مثلث متشابه باشند و این تناسب بدست آید ه ح : ه ا = ه ا : ه د یا $\overline{ه ا}^2$ = ه ح × ه د

شرح - این شکل نیز از شکل سابق استنباط شود بنابر انکه مماس ه ا را حد اوضاع خط قاطع متحرک در حول نقطهٔ ه دانیم

قضیهٔ سی و دوم ۳۲

چون بر خط ا ح و ا ه متقاطع بنقطهٔ ا چهار نقطهٔ ب و ح و د و ه را بر وجهی اختیار کنیم که ا ح × ا ب = ا د × ا ه گوییم این چهار نقطه بر محیط دایره واقع باشند

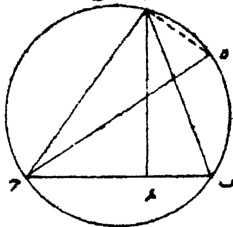


برهان اگر گوییم دایره مارّه بر سه نقطه ح و ب و د قاطع خط ا ه است بر نقطهٔ م نه بر نقطهٔ ه آنوقت این تساوی حاصل شود ا ب × ا ح = ا د × ا م و بنا بر فرض ا ب × ا ح = ا د × ا ه پس این تساوی استنباط شود ا د × ا م = ا د × ا ه و این حکم صحیح نیست

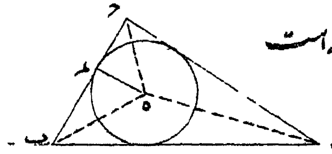
واگر بگوئیم دایره مارّه بر سه نقطه ح د ب و د ه مماس میکرد خط اه را بر نقطه ه این
تساوی حاصل میشد اب × اح = اد^۲ و بنا بر فرض اب × اح = اد × اه پس اد = اه

قضیهٔ سی و سیم ۳۳

در مثلث اب ح مسطح دو ضلع اب و اح مساویست با مسطح قطر دایره محیطیه و عمود اد وارد بر ضلع سیم ب ح



برهان بعد از وصل اه دو مثلث ا ب د و ا ه ح قائم الزاویه میشوند یکی بر د و دیگری بر ح علاوه بر آن زاویه ب = ه پس این دو مثلث متشابه باشند
و این تناسب نتیجه شود اب : ح ه = اد : اح و بعد این تساوی اب × اح = ح ه × اد
نتیجه - طرفین این تساوی را در ب ح ضرب میکنیم چنین میشود اب × اح × ب ح = ح ه × اد × ب ح و چون اد × ب ح مضاعف سطح مثلث است و ع پس حاصل ضرب سه ضلع هر مثلث مساوی باشد با حاصل ضرب مساحتش در مضاعف قطر دایره محیطه
و حاصل ضرب سه خط را نظر بانچه بعد از این ذکر خواهد شد جسم گوئیم و تقدیرش بر این وجه باشد که آن خطوط را با عدد مبدل کنیم و بعده بهمدیگر ضرب نمائیم
شرح این حکم نیز محقق است که مساحت هر مثلث مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع دایره محاطیه در آن مثلث
برهان مثلثات اه ب و ب ه ح و اه ح مشارکند در رأس ه و ارتفاع همه شعاع دایره محاطیه است پس مجموع این مثلثات مساویست با سطح مجموع قواعد اب و ب ح و اح

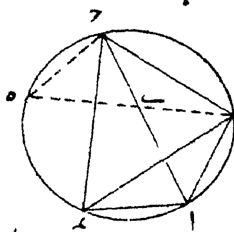


در نصف شعاع ه د پس مساحت مثلث اب ح مساوی است با دوره اش در نصف شعاع دایره محاطیه

قضیه سی و چهارم ۱۳۴

در ذوار بعة اضلاع محاطیه اب ح د مسطح دو قطر اح و ب د مساوی است با مجموع دو مسطح هر دو ضلع متقابل بر وجهیکه این تساوی حاصل شود اح × ب د = اب × ح د + اد × ب ح

برهان ح ه را مساوی اد جدا کنید و وصل نمائید ب ه را تا قطع کند قطر اح شکل را بر نقطه ب آن وقت زاویه اب د = ح ب ـ چونکه مقیاس یکی نصف اد است و مقیاس دیگر نصف ح ه = اد و زاویه ادب = ب ح ـ چونکه هر دو محاطیه اند در قوس اب پس مثلث اب د مشابه باشد با مثلث ـ ب ح و این تناسب نتیجه شود اد : ح ـ = ب د : ب ح و بعد این تساوی اد × ب ح = ح ـ × ب د



حال گوئیم مثلث اب ـ مشابه است با مثلث ب د ح چونکه قوس اد مساوی است با ح ه و بعد از آنکه ه د را بر دو طرف اضافه کنیم قوس اه مساوی شود با د ح پس زاویه اب ـ = د ب ح و علاوه بر آن زاویه ب اـ = ب د ح چون محاطیه اند در یک قوس پس دو مثلث اب ـ و د ب ح متشابه باشند و اضلاع متقابله متناسب با این صورت اب : ب د = اـ : ح د و بعد این تساوی اب × ح د = اـ × ب د حال چون دو تساوی بدست آمده را با هم جمع کنیم و ملاحظه نمائیم که اـ × ب د + ح ـ × ب د = (اـ + ح ـ) × ب د = اح × ب د تساوی مقصود بدست آید از این قرار

اد × ب ح + اب × ح د = اح × ب د

قضیهٔ سی و پنجم

دو قطر هر ذو اربعة اضلاع محاطیه بر نسبت دو مجموع مسطحات اضلاع باشند که منتهی شده اند باطراف آن دو قطر

برهان در شکل سابق ذو اربعة اضلاع ا ب ج د را قطر ا ج بدو مثلث ا ب ج و ا د ج قسمت نموده و چون شعاع دایره محیطه را ن فرض کنیم این دو تساوی نتیجه میشود (۳۳)

اب × بج × اج = ۴ ن × ا ب ج

اد × دج × اج = ۴ن × ا د ج

وبعد از جمع چنین شود اج (اب × بج + اد × دج) = ۴ن × اب ج د وچون بقطر ب د همان ذو اربعة اضلاع را بدو مثلث قسمت کنیم بهمانوجه این تساوی حاصل شود

ب د (اب × اد + ب ج × دج) = ۴ن × اب ج د

وبعد اج × (اب × بج + اد × دج) = ب د × (اب × اد + ب ج × دج)

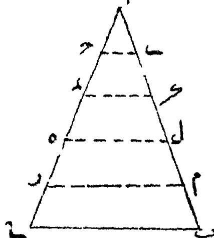
واز آن تساوی این تناسب نتیجه شود

اج : ب د = اب × اد + ب ج × دج : اب × بج + اد × دج

در مسائل متعلقه بمقالهٔ سیم

مسئلهٔ اوّل

میخواهیم خط مفروضی را بأجزای متناسبه قسمت کنیم یا بر نسبت خطوط معینه



اولاً میخواهیم خط اب را بر پنج جزو متساوی قسمت کنیم پس بر طرف خط غیر معین الوضع اح را مرور میدهیم و قطعهٔ از آن بقدر اد مثلاً جدا میکنیم و از آن پنج مرتبه تا ح نقل میکنیم ونقطهٔ ح را بطرف ب وصل میکنیم وبعد جـ را

موازات

بموازات ح ب رسم میکنیم و میگوئیم اه خمس خط اب است و چون آنرا پنج مرتبه بر اب
نقل کنیم آن خط بر پنج جزء متساوی قسمت شود

برهان چون ح ه موازیست با ح ب دو ضلع اح و اب بر دو نقطه ح و ه
بر یک نسبت قسمت شوند (ع۱) و اح خمس اح است پس اه نیز خمس اب باشد

ثانیاً میخواهیم اب را بر نسبت خطوط ل و م و ن
قسمت کنیم پس بر طرف ا خط غیر معین اط را رسم کنیم
و اح را مساوی ل جدا میکنیم و حد را مساوی م
و ده را مساوی ن و نقطه ه را به ب وصل میکنیم
و بر ح و د دو خط حك و دی را بموازات
ه ب رسم میکنیم و میگوئیم خط اب قسمت شده است باجزای اك و كی و ی ب به
نسبت خطوط ل و م و ن

برهان نظر بتوازی خطوط حك و دی و ه ب اجزای اك و كی و ی ب
متناسب باشند با اجزای اح و حد و ده (ع۱) و بعلت اجزای غیر مساوی خطوط
مفروضه ل و م و ن جدا نموده بودیم

مسئلهٔ دوم

سه خط ا و ب و ح مفروض است میخواهیم خط چهارم متناسب آنها را معلوم کنیم
دو خط ده و دو را بزاویه رسم کنید
واز ده جزء دا را مساوی ا جدا کنید
و دب را مساوی ب واز دو جزء دح
را مساوی ح جدا کنید و خط اح را وصل

کنید و از نقطه ب خط ب م را بموازات ا ح رسم کنید پس ه م چهارم متناسب مطلوب باشد

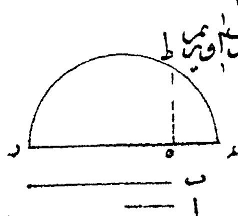
برهان چون ب م موازیست با ا ح این متناسب حاصل شود ه ا : ه ب = ه ح : ه م

و سه جزو اول این متناسب را مساوی سه خط مفروض جدا کرده ایم پس ه م جزو مطلوبست

نتیجه — هرگاه دو خط ا و ب مفروض باشد جزو سیوم متناسبش را بهمین وجه معلوم کنیم چونکه جزو چهارم باشد از سه خط ا و ب و ب

مسئلهٔ سیوم

میخواهیم واسطهٔ هندسی ما بین دو خط ا و ب بدست آوریم



از خط غیر معین ه و جزو ه ه را مساوی ا جدا کنید و ه د را مساوی ب و بر قطر ه د نصف دایره ه ط د را رسم کنید و از نقطه ه عمود ه ط را بر قطر اخراج کنید و امتداد دهید تا بر نقطه ط بدایره منتهی شود پس طول ه ط واسطه هندسی مطلوبست

برهان عمود ط ه وارد از نقطه ط محیط بر قطر واسطه هندسی باشد ما بین دو قطعه ه ه و ه د قطر (ق ۲۵) و این دو قطعه را مساوی دو خط مفروض ا و ب جدا ساخته بودیم

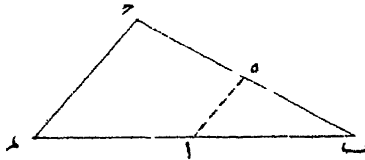
وجه دیگر — ه د را مساوی ب جدا کنید و ه ه را مساوی ا و بر قطر ه د دایره رسم کنید و ه ط را عمود کنید بر ه د و نقطه ط را وصل کنید بنقطه ه پس خط ط ه واسطه هندسی باشد ما بین ب و ا

وجه سیوم — در شکل (ق ۳۱) خط ه ح را مساوی ب جدا کنید و ه ه را مساوی ا و بر دو نقطه ه و ح دایره مرور دهید و از نقطه ه خط ه ا را مماس بر آن دایره کنید پس طول ه ا واسطه هندسی باشد ما بین ب و ا

مسئلهٔ چهارم

میخواهیم در زاویهٔ ب ح د خط ب د را بر نقطه ا چنان مرور دهیم که دو قطعه اب و اد واقعه ما بین او دو ضلع زاویه متساوی شوند

از نقطه ا خط اه را بموازات د ح رسم کنید و ه ب را مساوی ح ه جدا کنید و خط ب اد را بر دو نقطه ب و ا مرور دهید



و آن خط مطلوب است

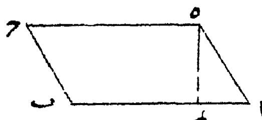
برهان چون اه موازیست با ح د

نسبت ب ه : ه ح = ب ا : اد و بعلاوه ب ه = ه ح پس ب ا = اد

مسئلهٔ پنجم

میخواهیم مربعی معادل متوازی الاضلاع یا مثلث مفروضی رسم کنیم

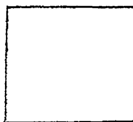
اولاً اب قاعده متوازی الاضلاع است و ه د ارتفاع آن و م ضلع مربع مطلوب پس باید این تساوی حاصل شود



$$م^2 = اب \times ده$$

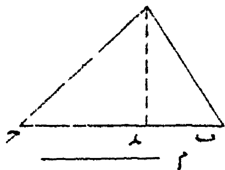
یا

$$اب : م = م : ده$$



یعنی که ضلع مربع واسطه هندسی باشد ما بین اب و ده

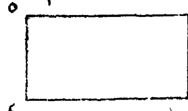
ثانیاً بهمین وجه معلوم میشود که ضلع مربع معادل با مثلث مفروض واسطه هندسی باشد ما بین قاعدهٔ آن مثلث و نصف ارتفاعش

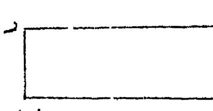


مسئلهٔ ششم

میخواهیم بر خط اد مسطح اده م را معادل با مسطح مفروض اب ح د رسم کنیم

ام ارتفاع مجهول مسطح اده م است و چون دو مسطح





باید متعادل باشند این تساوی نتیجه میشود اد × ام = اب × اح و بعد این تناسب

اد : اب = اح : ام پس خط مطلوب چهارم جزو تناسب شد در سه خط اد و اب و اح

مسئلهٔ هفتم

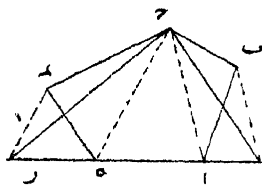
میخواهیم دو خط بدست آوریم بر نسبت مساحت دو مسطح مفروض اوب دو بعد مسطح اول باشد وح و د دو بعد ثانی و یکی از دو خط مطلوب طولش اختیاری است و ما آنرا ا فرض میکنیم و خط مجهول ثانی را م پس موافق صورت مسئله این تناسب حاصل میشود

ا × ب : ح × د = ا : م

و بعد م = $\frac{ا \times ح \times د}{ا \times ب} = \frac{ح \times د}{ب}$

پس خط مطلوب جزو چهارم تناسب شد در سه خط ب و ح و د

مسئلهٔ هشتم



میخواهیم مثلثی معادل کثیر الاضلاعی رسم کنیم

شکل اب ح د ه کثیر الاضلاع مفروض است پس قطر ح ه را وصل کنیم و آن مثلث ح د ه را جدا سازد و بر نقطه د خط د ر را بموازات ح ه رسم کنید تا استقامت اه را بر نقطه ر قطع کند و ح ر را وصل کنید پس کثیر الاضلاع اب ح د ه معادل شود با کثیر الاضلاع اب ح ر که یک ضلع کمتر دارد

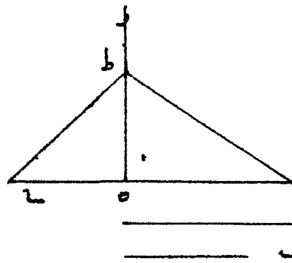
زیرا که دو مثلث ح د ه و ح ر ه بر قاعده مشترکه ح ه باشد و نیز برابر ارتفاع واحد چونکه دو راس آنها د و ر واقع باشند بر خط د ر که بموازات قاعده است پس این دو مثلث متعادل باشند و چون بر طرفین شکل اب ح ه را اضافه کنیم از یک طرف کثیر الاضلاع اب ح د ه ترکیب میشود و از طرفی کثیر الاضلاع اب ح ر و این دو متعادل کردند

وهمچنین میتوان زاویه ب را از میان برد بانکه مثلث اب د را مبدل کنیم بمثلث معادل آن ا ح د وازاینقرار دو خمسهٔ اضلاع ابجده مبدل شود بمثلث معادل ح د این قاعده کلّی است و بجمیع اشکال تعلق گیرد چونکه در هر عمل واحدی از عدد اضلاع کم شود وعاقبت میرسیم بمثلثی که معادل باشد با شکل مفروض

شرح. سابق ذکر شد که هر مثلث را میتوان بمربع تحویل نمود (مسئله ۵) پس بعد از مسئله مذکوره جمیع اشکال مستقیمة الخطوط را میتوان بمربع تحویل کرد و چنین عمل را تربیع شکل گوئیم و مسئله تربیع دایره اینست که مربعی بدست آوریم معادل با سطح دایره معلوم القطر

مسئله نهم

میخواهیم مربعی ترتیب دهیم که مساوی باشد با مجموع یا با تفاضل دو مربع معلوم



ا و ب دو ضلع دو مربع مفروض باشد

اوّلاً اگر بخواهیم مربعی مساوی با مجموع این دو مربع رسم کنیم دو خط ه د و ه ط را بزاویه قائمه رسم کنید و ه د را مساوی ا جدا کنید و ه ط را مساوی ب و خط د ط را وصل کنید این خط ضلع مربع مطلوب باشد

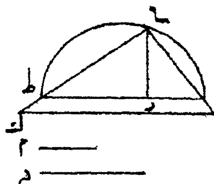
برهان مثلث د ه ط چون قائم الزاویه است مربع د ط مساوی باشد با مجموع دو مربع ه د و ه ط

ثانیاً اگر بخواهیم مربعی مساوی با تفاضل دو مربع رسم کنیم باز بطریق مذکور زاویه قائمه ه ح را ترتیب دهید و ط ه را مساوی با اقصر دو ضلع ا و ب جدا کنید و از مرکز ط و بشعاع ط مساوی با ضلع دیگر قوسی رسم کنید تا ه ح را بر نقطه ح قطع کند و مربع ح ه مساوی شود بتفاضل دو مربع ا و ب زیرا که چون مثلث ط ه ح قائم الزاویه است و وتر ط ح = ا جدا شد و ضلع ط ه = ب پس مربع ه ح مساوی شود با فلان

شرح ـ بطریق مذکور بتوان مربعی ترتیب داد معادل با مجموع هر چند مربع که خواسته باشیم زیرا که بعملی که دو مربع تحویل شود بیک سه مربع تحویل خواهد شد بدو مربع و آن بیکی وهکذا الکم بخواهیم از مجموع چند مربع چند مربع دیگر موضوع کنیم

مسئلهٔ دهم

میخواهیم مربعی ترتیب دهیم که نسبتش بمربع مفروض ا ب د ه مثل م باشد بخط ن بر خط غیر معین ه ط جزء ه و را مساوی م بگیرید و جزء و ط را مساوی ن و بر قطر ه ط نصف دایره رسم کنید و از نقطه و عمود و ح را بر قطر اخراج کنید و از نقطهٔ ح دو وتر ح ط و ح ه را وصل کنید و امتداد

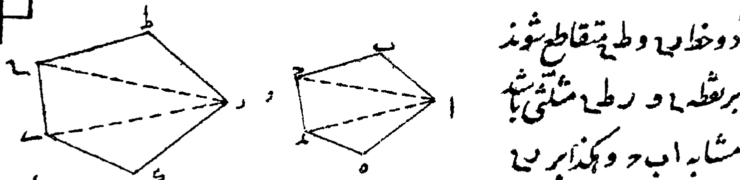


دهید و از خط اول ح ک را مساوی ضلع ا ب مربع مفروض جدا کنید و از نقطه ک خط ک ـ را بموازات ط ه رسم کنید پس ح ـ ضلع مربع مطلوب است

برهان نظر بتوازی دو خط ک ـ و ط ه این تناسب حاصل شود ح ـ : ح ک = ح ه : ح ط و بعد از تربیع $\overline{ح ـ}^2 : \overline{ح ک}^2 = \overline{ح ه}^2 : \overline{ح ط}^2$ ولی در مثلث قائم الزاویه ه ح ط و ۱۱ مربع ح ه نسبت بمربع ح ط مثل قطعه ه و است بقطعه و ط یا مثل م است به ن پس $\overline{ح ـ}^2 : \overline{ح ک}^2 = م : ن$ ولی ح ک = ا ب پس مربع ح ـ نسبت بمربع ا ب مثل م است به ن

مسئلهٔ یازدهم ۱۱۹

میخواهیم بر ضلع و ط نظیر ا ب کثیر الاضلاعی مشابه با ا ب د ه رسم کنیم در کثیر الاضلاع مفروض دو قطر ا د و ا ه را وصل میکنیم و بر نقطه و زاویهٔ ح و ط را مساوی ب ا د رسم میکنیم و بر نقطه ط زاویه و ط ح را مساوی ا ب د ...



دو خط ب ح و ط ح متقاطع شوند
بر نقطه ح و رط ح مثلثی باشد
مشابه اب ح و همچنین ب ح
نظیر ا ح مثلث و ب ح را مشابه ا د ح رسم میکنیم و بر د ه نظیر ا ه مثلث و ك
را مشابه ا د ه پس کثیر الاضلاع ر ط ح ـ ك شکل مطلوب است و مشابه با اب ح د ه
زیراکه این دو شکل مرکب باشند از یک عده از مثلثات متشابهه و متشابه الوضع

مسئله دوازدهم

دو شکل متشابه مفروض است میخواهیم شکلی دیگر رسم کنیم متشابه آنها که مساوی
باشد با مجموع یا با تفاضل دو مساحتشان

فرض میکنیم سطح دو کثیر الاضلاع مفروض ل باشد و ك و دو ضلع متناظر آنها ا
و ب و سطح کثیر الاضلاع مطلوب م و ضلع نظیر با ا و ب از این کثیر الاضلاع ح
هر دو کثیر الاضلاع متشابه چون بر نسبت مربع هر دو ضلع متناظر اند این تناسب حاصل شود

$$ل : ك = ا^۲ : ب^۲$$

و بعد از ترکیب $ل : ل + ك = ا^۲ : ا^۲ + ب^۲$

و نیز $ل : م = ا^۲ : ح^۲$

و چون $م = ل + ك$ و دو تناسب اخیر در سه جمله مشارک باشند و بنابراین $ح^۲ =$
$ا^۲ + ب^۲$ و از اینقرار ضلع ح وتر زاویه قائمه مثلثی شد که دو ضلع مجاور بزاویه قائمه
ا باشد و ب

و چون ضلع ح بدست آمد مسئله منجر میشود بمسئله سابقه
و اگر میخواهیم کثیر الاضلاع م معادل شود با ل ـ ك بطریق مذکور بازاین دو تناسب

حامد شد

حاصل میشود $ل : ك = ا^۲ : ب^۲$

و بعد از تفصیل $ل : ل - ك = ا^۲ : ا^۲ - ب^۲$

و نیز $ل : م = ا^۲ : ح^۲$

پس $ح^۲ = ا^۲ - ب^۲$

مسئلهٔ سیزدهم ۱۳

میخواهیم شکلی مشابه بشکل مفروض دیگر رسم کنیم بر وجهی که نسبتش بشکل مفروض مثل عدد س باشد بعدد ع

مساحت شکل مفروض را ل فرض میکنیم و یکی از اضلاعش را ا و مساحت شکل مطلوب را م و آن ضلعش را که نظیر ا باشد ح

پس بحکم مسئله $م : ل = س : ع$

و نظر بتشابه دو شکل $م : ل = ح^۲ : ا^۲$

پس $ح^۲ : ا^۲ = س : ع$

بنابراین باید ضلع ح را بدستور مسئله ۱۰ معلوم کرد

مسئلهٔ چهاردهم ۱۴

میخواهیم شکلی مشابه با شکل ل رسم کنیم بر وجهیکه مساحتش معادل باشد با شکل ك

یکی از اضلاع کثیر الاضلاع ل را ا فرض کنیم و ح را ضلع نظیرش از شکل مطلوب م

پس نظر بتشابه دو شکل $ل : م = ا^۲ : ح^۲$

و چون م باید بفرض با معادل شود با ك این تناسب حاصل شود

$ل : ك = ا^۲ : ح^۲$

پس اگر دو مربع طلب کنیم مثل سه² و ع² که معادل باشند با ل و ك این تناسب حاصل شود

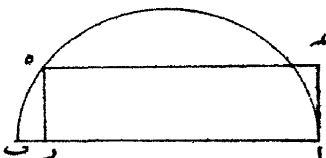
سه² : ع² = ا² : ح²

پس سه : ع = ا : ح

بنابراین خط مطلوب ح جزء چهارم متناسب شد در سه خط سه و ع و ا

مسئله پانزدهم ١٥

میخواهیم مسطحی رسم کنیم معادل با مربع مفروض ح بر وجهی که مجموع دو ضلع مجاورش بطول خط اب باشد





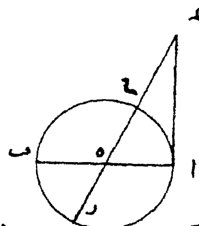
بر قطر اب نصف دایره رسم کنید و خط هد را موازات قطر رسم کنید چنانچه فاصله امد مساوی باشد با ضلع مربع مفروض ح و از نقطه انجا که انحنا دایره را قطع میکند عمود ه د را بر قطر فرود آورید پس اد و دب دو ضلع مسطح مطلوب باشد برهان مجموعشان مساویست با اب و مسطحشان اد × دب مساویست با مربع ه د و ٢٥ یعنی با مربع امد پس این مسطح معادل باشد با مربع مفروض ح

شرح - شرط امکان مسئله اینست که فاصله امد از شعاع تجاوز نکند یعنی ضلع مربع ح اطول نباشد از نصف خط اب

مسئله شانزدهم ١٦

میخواهیم مسطحی رسم کنیم معادل با مربع ح بر وجهی که تفاضل دو ضلع مجاورش بطول اب باشد

بر قطر اب دایره رسم کنید و بر طرف قطر مماس اد را مساوی با ضلع مربع ح رسم کنید و بر نقطه د و مرکز ه قاطع ده را مرور دهید پس ده و دد دو ضلع مجاور مسطح مطلوب اند



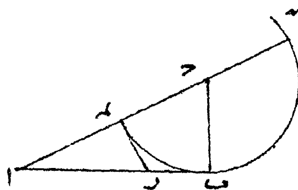
برهان اولاً شعاع این دو ضلع مساویست با قطر ار
یا اب ثانیاً سطح حه × حد مساویست با اح²
و ۳۱ پس نیم سطح معادل باشد با مربع مفروض

مسئلهٔ هفدهم[۱]

میخواهیم خط اب را بنسبت ذات وسط و طرفین قسمت کنیم یعنی بدو جزء چنانچه
جزء اعظم واسطهٔ هندسی باشد ما بین تمام خط و جزء اصغر آن

فرض میکنیم ر نقطهٔ تقسیم خط باشد پس بنابر فرض مسئله

اب : ار = ار : رب



و بترکیب اب + ار : اب = ار + رب یا اب : ار

و بنابراین (اب + ار) × ار = اب²

از انتقرار دو خط اب + ار و ار (خط ار مجهول مسئله است) تفاضلی دارند معین بطول اب
و سطحشان مساویست با اب² پس طول آنها را میتوان بدستور سابقه معلوم کرد و آن در عمل
بر طرف ب از خط اب عمود ب ح را باندازهٔ نصف اب اخراج کنید و از مرکز ح و بشعاع
ح ب دایره رسم کنید و خط ا ح ه را وصل نمائید پس دو خط مطلوب اه باشد و اد زیرا
تفاضلشان د ه = اب و علاوه بر آن

اب² = اه × اد

اقصر این دو خط یعنی اد قطعه ار باشد پس باید از مرکز ا و بشعاع اد قوسی رسم نمود
تا انقطع بر اب نقل شود

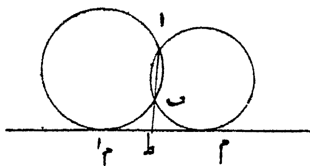
شرح فرض میکنیم اب = ط و ار = اد = اح − حد

واح = √(اب² + بح²) = √(ط² + ط²/۴) = √(۵ط²/۴) = ط/۲ √۵ و حد = ط/۲

پس ار = ط/۲ √۵ − ط/۲ = ط/۲ × (√۵ − ۱)

مسئله هیجدهم ۱۸

میخواهیم دایره رسم کنیم که مرور کند بر دو نقطه ا و ب و مماس شود با خط مفروض م مَ

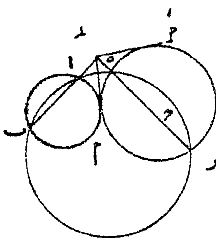


فرض میکنیم مسئله حل شده و ا ب م دایره مطلوب باشد پس ا ب را امتداد دهید تا نقطه ط و از سابق میدانیم که مماس ط م واسطه هندسی است ما بین ط ا و ط ب

پس وضع نقطه م با نیستم بدست آید که واسطه هندسی بین ط ا و ط ب معلوم کنیم و از ابتدا از نقطه ط بر خط مفروض نقل کنیم و چون نقطه م مشخص شد مرکز دایره بسهولت معلوم شود فاصله ط م را در دو جهت میتوان نقل نمود بنا بر این مسئله بطور کلی صاحب دو جواب باشد

مسئله نوزدهم

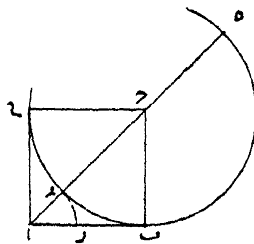
میخواهیم بر دو نقطه ا و ب دایره مرور دهیم که تماس کند دایره مفروضه یکی ح م مَ را



فرض میکنیم مسئله حل شده و ا م ب دایره معلوم باشد و مماس مشترک م ه را رسم میکنیم و امتداد میدهیم تا قاطع ا ب را بر ه قطع کند و از ه قاطع ه د ی را در دایره ح رسم میکنیم (حاشیه)

مسئله بیستم

میخواهیم مقیاس مشترکی در صورت امکان ما بین قطر و ضلع مربع مشخص کنیم
شکل ا ب ح ء مربع مفروض است و ا ح قطر شکل اول ح ب را هر چند مرتبه ممکن باشد



براه نقل میکنیم ولهذا از مرکز ح وشعاع ح ب
نصف دایره ط ب ه را رسم میکنیم ومعلوم میشود
که ح ب یکمرتبه در ح ا بگنجد وباقیش اط باشد
پس نتیجه عمل اول این شد خارج قسمت ۱ وباقی ام
وحال باید آنرا سنجید به ح ب یا بمساویش اب
پس میتوان اد را مساوی اط جدا نمود وآنرا بر اب نقل کرد ومعلوم کرد که دو مرتبه در اه
بگنجد وباقیش چیزی باشد ولی چون این باقی با ندازه مقدار جاروی بغایت ناقص است وطول تمیکند که نظر
بصغری که پیدا میکند از دست بروند واین براه واسطهٔ زور نا قص شد در تعین مطلوب واز
از وی نتوان حکم صریح کرد درینکه آیا دو خط اح و حب را مقیاس مشترک هست یا نه
و وسیله آسانی در دست هست که عمل را بخطوط متناقصه نکشاند وهمواره در خطوطی باشد که
طولشان بر قرار باقیست وتفصیلش اینست
چون زاویه اب ح قائمه است اب مماس دایره شود و اه قاطعی باشد که از همان نقطهٔ
دایره رسم شده پس اط : اب = اب : اه واز اینقرار در عمل ثانی که مقصود مقایسه اط و
اب است میتوان عوض نسبت اط : اب نسبت اب : اه را اختیار نمود و اب یا
مساویش ح ط دو مرتبه در اه بگنجد وباقیش اط باشد پس نتیجه عمل ثانی خارج قسمت ۲ است
وباقی اط که باید به اب سنجید
عمل ثالث چون منجر شد بمقایسه اط و اب پس بنا بر آنچه ذکر شد باز مبدل شود بمقایسهٔ اب
یا مساویش ح ط نسبت به اه واز اینقرار خارج قسمت ۲ باشد وباقی اط
پس معلوم هست که این عمل را حد و انتهائی نباشد واز اینقرار مقیاس مشترکی مابین قطر وضلع
مربع بدست نیاید واین مطلب در علم حساب مبین شده بود چونکه این دو خط بر نسبت ۲√ : ۱ باشد

بواحد یعنی اصم است ولی بدلیل هندسی واضح‌تر و روشن‌تر گردید

شرح - پس میان قطر مربع و ضلعش نه مقیاس خطی بدست آمد و نه نسبت عددی محقق حاصل گشت ولی تا هر حد و مقام که خواهیم میتوان بوساطت کسر مسلسل که مساوی آن نسبت باشد مطلوب بتقریب جست بعمل اول خارج قسمت ۱ شد و بعمل دوم و سایر اعمال الی غیر نهایت خارج قسمتها همه ۲ شدند و بنا براین کسر مسلسل مطلوب اینست

$$۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cdots}}}}}$$

الی غیر نهایت

مثلاً اگر تا جملهٔ چهارم درونی توقف کنیم مقدار نسبت این میشود $۱\frac{۱۲}{۲۹}$ یا $\frac{۴۱}{۲۹}$ یعنی که نسبت تقریبی قطر مربع بضلعش = ۴۱ : ۲۹ و چون عدد جملها را بیشتر اختیار کنیم به تحقیق نزدیکتر شویم

تنبیه - کسر مسلسلی که اینجا ذکرش درمیان آمد تفصیلش را در علم جبر و مقابله بیان کرده‌ایم ولی بی‌مناسبت نیست که مختصری در خصوص استخراج کسر مذکور اشاره کنیم

مسئله - میخواهیم بکسر مسلسل تحویل کنیم این مقدار اصم را $\sqrt{ح^{۲}+۱}$ و ح عددیست صحیح بزرگتر عدد صحیحی که در $\sqrt{ح^{۲}+۱}$ مندرج باشد ح است پس این تساوی را فرض کنیم

$\sqrt{ح^{۲}+۱} = ح + \frac{۱}{م'}$ و از آن این تساوی استخراج شود $م' = \frac{۱}{\sqrt{ح^{۲}+۱}-ح}$

و حال برای استخراج عدد صحیحی که در $م'$ مندرج باشد صورت و مخرج کسر را در این جمله $ح+\sqrt{ح^{۲}+۱}$ ضرب میکنیم تا باینصورت مختصر درآید

$$م' = ح + \sqrt{ح^{۲}+۱}$$

پس ظاهر شد که جزو صحیح $م'$ این باشد ۲ح و آنوقت فرض کنیم

$م' = ۲ح +$

$$\text{م}' = \text{ح} + \sqrt{\text{ح}^2 + 1} = 2\text{ح} + \frac{1}{\text{م}''} \quad \text{و بعد} \quad \text{م}'' = \frac{1}{\sqrt{\text{ح}^2+1} - \text{ح}}$$

وانمقدار م″ بعینه همانست که برای م′ سابق بدست آمده بود پس معلوم میشود که مقدار $\sqrt{\text{ح}^2+1}$ این کسر مسلسل شود

$$\sqrt{\text{ح}^2+1} = \text{ح} + \cfrac{1}{2\text{ح} + \cfrac{1}{2\text{ح} + \cfrac{1}{2\text{ح} + \cfrac{1}{2\text{ح} + \cdots}}}}$$

الی غیر نهایه

ومن باب مثال فرض میکنیم $\sqrt{2}$ را و آن باینصورت نوشته شود $\sqrt{1+1} = \sqrt{1^2+1}$ و از اینقرار ح $= 1$ پس باین کسر مسلسل تحویل شود

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

الی غیر نهایه

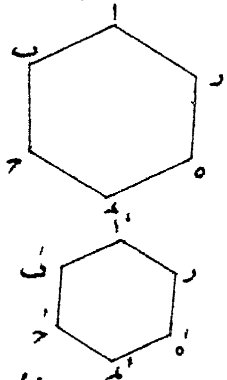
در خواص اشکال ذو کثیرة الاضلاع منتظمه و مساحت دایره

حدود

هر کثیر الاضلاعی که متساوی الزوایا باشد و هم متساوی الاضلاع از آن کثیر الاضلاع منتظمه گویند
کثیر الاضلاع منتظمه انواع دارد و اضلاعش بهر شمار میرسد مثلث متساوی الاضلاع منتظمه است که دارای سه ضلع باشد و مربع انکه دارای چهار

قضیه اول

هر دو کثیر الاضلاع منتظمه که دارای یك عده اضلاع باشند متشابه اند



دو مسدس اختیار میکنیم مثل اب ج د ه ز و اَ بَ جَ دَ هَ زَ
مجموع زوایا در هر دو یکی است و مقدارش هشت قائمه است (۱۳۱)
و زاویه ا سدس آن مجموع باشد و همچنین زاویه اَ پس این دو زاویه متساوی باشند و هکذا دو زاویه ب و بَ و ج و جَ و غیره
و علاوه بر آن نظر بتعریف این نوع اشکال اضلاع اب و ب ج و ج د و غیره متساوی باشند و همین اضلاع اَ بَ و بَ جَ و جَ دَ و غیره پس این تناسب حاصل شود اب : اَ بَ = ب ج : بَ جَ = ج د : جَ دَ
و غیره پس دو شکل مذکور زوایا شان متساوی شد و اضلاعشان متناسب و بنابراین متشابه باشند.
نتیجه هر دو کثیر الاضلاع منتظم که بیک عدد اضلاع باشد و محیطشان بر نسبت دو ضلع متناظر باشد و سطحشان بر نسبت مربع اندو ضلع
شرح - زاویه کثیر الاضلاع منتظم از روی عدد اضلاعش بدست آید مثل زاویه کثیر الاضلاع متساوی الزوایا

قضیه دوم

کثیر الاضلاع منتظم را میتوان گرد دایره محاط نمود و نیز بر دایره محیط کرد

اب حد ه .... کثیر الاضلاع مفروض باشد و دایره بر سه نقطه ا و ب و ح مرور دهید و مرکزش نقطه م باشد و م ل عمود وارد بر وسط ضلع ب ح و دو خط ا م و م د را وصل کنید حال گوئیم دو ذو اربعه اضلاع م ل ح د و م ل ب ا را میتوان بر همدیگر منطبق نمود زیرا که ضلع م ل در هر دو مشترک است و زاویه م ل ح = م ل ب چونکه هر دو قائمه اند پس ضلع ل ح منطبق شود بمساوی خود ل ب و نقطه ح بر ب و نظر بتعریف کثیر الاضلاع زاویه ل ح د = ل ب ا پس ح د واقع شود بر استقامت ب ا و چون ح د = ب ا نقطه د واقع شود بر ا و دو ذو اربعه اضلاع بر همدیگر منطبق شوند پس فاصله م د مساوی باشد با م ا و بنا بر این دایره ماره بر سه نقطه ا و ب و ح بر نقطه د نیز گذرد و بهمین دلیل ثابت میکنیم که دایره مارهٔ بر سه نقطه ب و ح و د مرور کند بر راس ه بعد ه و هکذا در ما بقی پس همان دایره که بر سه نقطه ا و ب و ح گذشته مرور کند بر سائر رؤس کثیر الاضلاع و بنا بر این آن شکل محاط شود در دایره

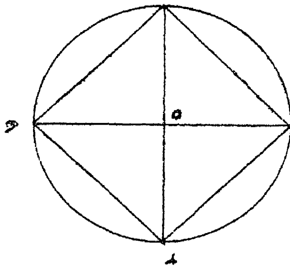
ثانیاً نسبت باین دایره جمیع اضلاع اب و ب ح و ح د وغیره او تار متساویه اند پس یک بُعد باشند از مرکز (ت ۱ و ۲) پس اگر از مرکز م و بشعاع م ل دایره رسم کنیم این دایره تماس کند ضلع ب ح و سایر اضلاع کثیر الاضلاع را و هر کدام را در نقطه وسط و دایره محاط شود در کثیر الاضلاع تا آنکه کثیر الاضلاع محیط شود بر دایره

شرح اول — نقطه م مرکز مشترک دایره محاطیه و دایره محیطیه را میتوان مرکز کثیر الاضلاع گفت و باین ملاحظه زاویه ا م ب حادثه ما بین دو شعاعی که بطرفین ضلع ا ب وصل شوند زاویه مرکزیه گوئیم و چون جمیع اوتار اب و ب ح وغیره متساویند ظاهر است که جمیع زوایای

مرکزیه نیز متساوی‌اند و بنابراین مقدار هر کدام بانیوجه حاصل شود که چهار قائمه را قسمت کنیم
بر عدد اضلاع کثیر الاضلاع

شرح ۲ - چون خواهیم در دایره مفروضه کثیر الاضلاع منتظمه صاحب چند ضلع باشد
محاط کنیم هیچ عمل لازم نیست جز آنکه محیط را بعدد اضلاع کثیر الاضلاع بر اجزای متساویه
قسمت کنیم زیرا که چون قسی متساوی شدند اوتار اب و ب ج و ج د و غیره متساوی گردند
(شکل ۴) و مثلثات اب م و ب م ج و ج م د و غیره نیز متساوی شوند چونکه
متساوی الاضلاع‌اند نسبت بیکدیگر پس جمیع زوایای اب ج و ب ج د و ج د ه و غیره
متساوی گردند و شکل اب ج د ..... کثیر الاضلاع منتظمه باشد

شرح ۳ - چون در قوس دایره اوتار متساویه محاط کنیم شکلی را که صورت می بندد
قطعه کثیر الاضلاع منتظمه گوئیم چنین قطعه دارا باشد خواص اصلیه اشکال کثیر الاضلاع منتظمه را
چونکه زوایایش متساویه‌اند و هم محاط شود در دایره و هم محیط شود بر آن ولی هیچ کثیر الاضلاع
منتظمه مخصوصی متعلق نباشد جز آنوقت که قوس موتر یکی از اضلاعش حصه صحیحی باشد
از تمام محیط



قضیه ۳ مسئله

میخواهیم در دایره مفروضه مربعی محاط کنیم
دو قطر اج و ب د را بر هم عمود کنید و اطراف
اب و ب ج و ج د و د ا را بخطوط وصل کنید و شکل اب ج د
مربع محاطی باشد چونکه زوایای ا ه ب و ب ه ج و غیره متساوی باشند و اوتار آب
و ب ج و غیره نیز متساوی

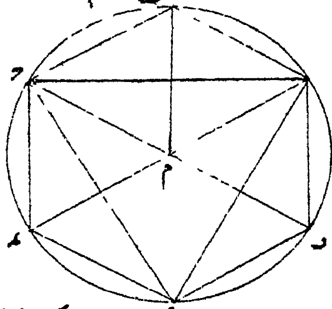
شرح مثلث ب ه ج چون قائم الزاویه است و متساوی الساقین (۱۱ و ۳) این تناسب حاصل شود

ب ج ؛

ب ح : ب ه = $\sqrt{2}$: ۱ پس ضلع مربع محاطی نسبت بشعاع مثل جذر ۲ است بواحد

قضیهٔ ۱۴ مسئله

میخواهیم در دایرهٔ مفروضه شکل مسدس و مثلث متساوی الاضلاع محاط کنیم



فرض میکنیم مسئله را حل شده و اب ضلع مسدس محاطی باشد و دو شعاع ام و م ب را وصل میکنیم و میکوئیم مثلث ام ب متساوی الاضلاع است برهان زاویه ام ب سدس چهار قائمه است

وچون قائمه را واحد فرض کنیم ام ب = $\frac{4}{6}$ = $\frac{2}{3}$ و مجموع دو زاویه دیگر اب م و ب ام همان مثلث این میشود ۲ - $\frac{2}{3}$ = $\frac{4}{3}$ وچون اندو زاویه برابرند مقدار هر کدام $\frac{2}{3}$ باشد پس مثلث ا ب م متساوی الاضلاع باشد و ضلع مسدس محاطی مساوی شود باشعاع دایره

وبنابراین چون خواهیم در دایره مسدسی محاط کنیم باید شعاعش را شش مرتبه بر محیط نقل نمود و لابد نقطهٔ منتها بر مبدا واقع شود

وچون مسدس اب ح ده د محاط شد و رؤس زوایایش را یک در میان وصل کنیم مثلث متساوی الاضلاع اح ه بدست آید

شرح ـ شکل اب ح م معین است یعنی اضلاعش هم متوازی باشد و هم متساوی چونکه اب = ب ح = ح م = ام پس (ق ۱۵ ۳) مجموع دو مربع دو قطر $\overline{اح}^2$ + $\overline{بم}^2$ مساوی باشد با مجموع مربعات اضلاع که ۴ $\overline{اب}^2$ باشد یا ۴ $\overline{بم}^2$ و چون از طرفین $\overline{بم}^2$ را موضوع کنیم باقی $\overline{اح}^2$ = ۳ $\overline{بم}^2$ پس ضلع مثلث متساوی الاضلاع

نسبت بشعاع مثل جذر ۳ است بواحد

قضیه ۵ مسئله

میخواهیم در دایرهٔ مفروضه شکل معشری محاط کنیم

فرض میکنیم مسئله را حل شده و اب ضلع معشر محاطی باشد و زاویهٔ مرکزیهٔ ام ب $= \frac{۴}{۱۰}$ یا $\frac{۲}{۵}$ پس مجموع دو زاویهٔ م ب ا و م ا ب مساویست با ۲ $- \frac{۲}{۵}$ $= \frac{۸}{۵}$ و بنابراین مقدار هر کدام $\frac{۴}{۵}$ باشد حال بخط ب ن زاویهٔ م ب ا را نصف میکنیم و مثلث ن م ب متساوی الساقین شود چونکه دو زاویهٔ ن م ب و ن ب م هر کدام $\frac{۲}{۵}$ قائمه باشد و م ن = ن ب و مثلث ب ا ن نیز متساوی الساقین است زیرا زاویهٔ ن ب ا چون $\frac{۲}{۵}$ قائمه است و زاویهٔ ب ا ن مساوی است با $\frac{۴}{۵}$ زاویهٔ سیم ا ن ب لابد $\frac{۴}{۵}$ میشود

بنابراین ا ب = ب ن = ن م

و بالاخره ب م : ب ا = ن م : ا ن

یا ا م : م ن = م ن : ا ن

پس معلوم شد که شعاع ا م بر نقطهٔ ن بر نسبت ذات وسط و طرفین قسمت شده و جزء اعظم م ن ضلع معشر محاطی است

تنبیه — ضلع معشر محاط در دایره که شعاعش ن فرض شود نیست و ۱۸ را

$$\frac{ن\,(\sqrt{۵}-۱)}{۲}$$

نتیجهٔ اول — چون رئوس معشر را بتخطی وصل کنیم مخمس ا ح ه ک ب دست آید

نتیجه ۲ـ خط اب ضلع معشر است و ال ضلع مسدس و طول قوس ب ل نسبت بمحیط اینست $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ پس وتر ب ل ضلع کثیرالاضلاع ۱۵ ضلعی باشد وضمنا معلومست که قوس ح ل ثلث ح ب است

شرح ـ چون کثیرالاضلاع منتظمی در دایره محاط باشد قسی موتره باضلاعش را نصف کنیم واوتار انصاف قسی را وصل کنیم کثیرالاضلاع منتظم جدیدی ترکیب میشود که عدد اضلاعش مضاعف اول باشد و از اینقرار بوساطت مربع میتوان بترتیب کثیرالاضلاع ۸ ضلعی و ۱۶ و ۳۲ و .... محاط نمود و همچنین از روی مسدس کثیرالاضلاع ۱۲ ضلعی و ۲۴ و ۴۸ .... محاط کرد و از روی معشر کثیرالاضلاع ۲۰ ضلعی و ۴۰ و ۸۰ و .... محاط نمود و از روی ۱۵ ضلعی کثیرالاضلاع ۳۰ و ۶۰ ....

تنبیه ـ مدتی مهندسین براین اعتقاد بودند که اشکال کثیرالاضلاع منتظمه که بتوان از روی اصول هندسه و بعبارت اخری از روی حل معادلات درجه اول و دوم در دایره محاط کرد منحصر باشد بآنها که مذکور شد ولی یکی از مهندسین معروف به گُس سال ۱۲۱۴ در رساله مبرهن نمود که میتوان با مثال قواعد سابقه در دایره محاط نمود کثیرالاضلاعی که صاحب ۱۷ ضلع و بطور کلی آنچه دارای $۲^{ع} + ۱$ ضلع باشد مشروط بر آنکه $۲^{ع} + ۱$ فرد اول باشد

قضیه ۴ ـ مسئله

کثیرالاضلاع منتظم اب ح د .... در دایره محاط شده میخواهیم برآن کثیرالاضلاعی مشابهش محیط کنیم بر نقطه ع وسط قوس اب خط ی ط را مماس رسم کنیم و آن موازی باشد با اب (ق ۱۲) و مانند آنرا بر اوساط سایر قسی ب ح و ح د وغیره رسم میکنیم اینخطوط مماس

متقاطع شوند و کثیر الاضلاع منتظم محیطی ی ط ـ ل ... ترکیب شود مشابه کثیر الاضلاع محاطی

برهان این فقره آسان معلوم شود که سه نقطه م و ب و ط بر استقامت خطی واقع اند

زیرا که دو مثلث قائم الزاویه م ع ط و م ط ف مشارک کنند در وتر م ط و ضلع م ع = م ف

پس متساوی باشند (۱۹۱ و زاویه ع م ط = ط م ف بنا براین خط م ط عبور کند بر نقطه ب از

وسط قوس ع ف و بهمین وجه ظاهر میشود که نقطه ـ واقع است بر استقامت م ح و هکذا

و چون ی ط موازیست با اب و ط ـ با ب ح زاویه ی ط ـ = اب ح و همچنین زاویه

ط ـ ل = ب ح د و هکذا پس زوایای کثیر الاضلاع محیطی مساوی باشند با زوایای محاطی

و علاوه بر آن نظر بتوازی همین خطوط ی ط : اب = م ط : م ب و ط ـ : ب ح = م ط : م ب

پس ی ط : اب = ط ـ : ب ح ولی اب = ب ح پس ی ط = ط ـ و بهمین دلیل

ط ـ = ـ ل و هکذا پس اضلاع کثیر الاضلاع محیطی متساوی باشند پس این کثیر الاضلاع

منتظم باشد و مشابه کثیر الاضلاع محاطی

نتیجه ۱ ـ بعکس مذکور اگر کثیر الاضلاع محیطی ی ط ـ ل ... مفروض باشد و بخواهیم از

آن روی کثیر الاضلاع محاطی اب ح ... را رسم کنیم همین عمل کافیست که بر رؤس ی و ط

و ـ وغیره کثیر الاضلاع مفروض خطوط م ی و م ط و ... را رسم کنیم و آنها محیط را

بر نقاط ا و ب و ح وغیره قطع کنند و مابین نها را ابا و تار اب و ب ح وغیره وصل کنیم

تا از ترکیب آنها کثیر الاضلاع محاطی بدست آید و در همین حالت نیز میتوان مختصراً مابین

نقاط تماس ع و ف و ... را باوتار ع ف و ف ص وغیره وصل نمود تا باز کثیر

الاضلاع منتظم مشابه محاطی بدست آید

نتیجه ۲ ـ پس میتوان بر دایره مفروضه محیط نمود جمیع اشکال منتظمه را که بتوانیم محاط کنیم در آن دایره و بالعکس

قضیه هفتم

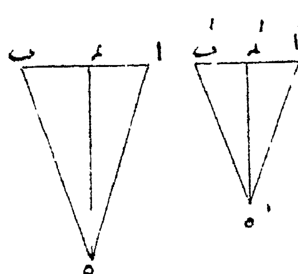
مساحت کثیر الاضلاع منتظم مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع دایرهٔ محاطیه

برهان در شکل سابق کثیر الاضلاع مفروض ح ط ـ ک ... بت و مساحت مثلث ح م ط = ح ط × ½ م ع و مساحت مثلث ط م ـ = ط ـ × ½ م ف و لی م ف = م ع پس مساحت مجموع دو مثلث = (ح ط + ط ـ) × ½ م ع و چون بهمین وجه در سایر مثلثات پیش ویم معلوم میشود که مساحت مجموع آنها یعنی مساحت کثیر الاضلاع تمام = مجموع قواعد ح ط + ط ـ + ... که محیط شکل باشد ضرب در ½ م ع که نصف شعاع دایره محاطیه باشد

شرح ـ شعاع دایره محاطیه یعنی م ع بعینه عمودیست که از مرکز بر یکی از اضلاعش اخراج شود و آنرا گاه ارتفاع کثیر الاضلاع نیز گویند

قضیهٔ هشتم

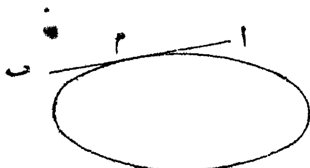
دو کثیر الاضلاع منتظم که عدد اضلاعشان برابر باشد محیطشان بر نسبت دو شعاع دو دایره محیطه است و نیز بر نسبت دو شعاع دو دایره محاطیه و سطوحشان بر نسبت مربعات همان شعه است،



برهان اب ضلع یکی از دو کثیر الاضلاع و ه مرکزش و بنابراین ه ا شعاع دایره محیطه اش و ه د عمود بر اب شعاع دایره محاطیه و بهذا اَبَ ضلع کثیر الاضلاع دیگر که متشابه اوست و هَ مرکزش و هَ اَ شعاع دایره محیطه اش و هَ دَ شعاع دایره محاطیه اش محیط دو کثیر الاضلاع بر نسبت دو ضلع اب و اَبَ است

و دو زاویه ا و اَ چون هر کدام نصف زاویهٔ کثیر الاضلاع است متساوی باشند و همچنین دو زاویه ب و بَ پس دو مثلث ا ب ه و اَ بَ هَ متشابه باشند و همچنین دو مثلث قائم الزاویه ا د ه و اَ دَ هَ پس ا ب : اَ بَ = ا ه : اَ هَ = د ه : دَ هَ پس محیط دو کثیر الاضلاع متناسب باشند بر نسبت دو شعاع ا ه و اَ هَ از دو دایره محیطیه و نیز بر نسبت دو شعاع د ه و دَ هَ از دو دایره محاطیه

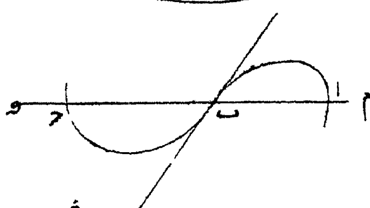
و چون سطح دو کثیر الاضلاع بر نسبت مربع دو ضلع متناظر ا ب و اَ بَ اند پس متناسب باشند بر نسبت مربع دو شعاع ا ه و اَ هَ از دو دایره محیطیه و بر نسبت مربع دو شعاع ه د و هَ دَ از دو دایره محاطیه



در مساحت دایره

تعریف

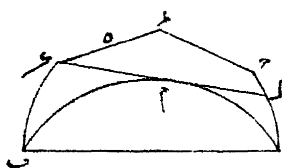
خط منحنی محدب آنست که چون بر هر نقطه اش خطی مماس کشیده تمام منحنی در یک سمت آن خط افتد خط منحنی محدب را چون خطی قطع کند فصل مشترکش از دو نقطه بیشتر نباشد پس اگر خط م ن



منحنی را بر سه نقطه ا و ب و ح قطع کند ظاهر است که چون مماسی بر یکی از نقاط ما بین مثل ب رسم کنیم قطعه از منحنی بیک سمتش افتد و قطعه بسمت دیگر

و محیط دایره خط منحنی است محدب

قضیهٔ نهم

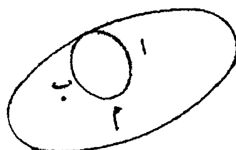


خط محدب ا م ب اقصر است از هر خطی که بر آن احاطه نموده باشد از طرفین منتهی شده باشد بنقطه ا و ب

برهان - اگر بگوئید ام ب نیست اقصر از جمیع خطوط محیطیه اش پس میان این خطوط باید خطی پیدا شود اقصر از مابقی که کوچکتر باشد از ام ب یا منتهایش برابران باشد

چنین خط را احدهب فرض میکنیم و بر نقطه از خط ام ب که غیر مشترک باشد در دو خط مثل م مماس ل م ک را رسم میکنیم این خط مندرج شود ما بین دو خط ام ب و ا حدهب چونکه اولی محدب است و خط ل ک اقصر است از ل حدهک پس چون بجای قطعه ل حدهک خط مستقیم ل ک را قرار دهید خط محیطی ال ک ب اقصر میشود از ال حدهب و حال آنکه بفرض با خط اخیر اقصر بود از ما بقی پس فرض باطل است و جمیع خطوط محیطیه اطول‌اند از خط ام ب

و بهمین وجه ثابت کنیم که خط محدب مسدود ام ب اقصر است از هر خطی که از اطراف بر آن احاطه نموده باشد



قبل از ذکر اصول مبحث حدود که در مساحت اشکال منحنیه بکار آیند شرح معانی بعضی اصطلاحات مستعمله بیفایده نیست

مقدار تغیر پذیر یا ثابت نسبت که حالات و اوضاع مختلفه کمیت متدرجا بان تعلق گیرد

حد عبارت از مقداریست ثابت که مقدار تغیر پذیر تا هر مقام تواند بان نزدیک شود ولی نتواند بآن رسد

در علم حساب و هندسه امثله عدیده هست از مقادیر تغیر پذیر و از حدود دیگر که بسمت شان آن مقادیر میل میکنند

مثلا میدانیم که مقدار زاویه کثیر الاضلاع منتظم که صاحب ع ضلع باشد نیست $\frac{۴-۴۲}{ع}$ = قائمه $\frac{۴}{ع}$

و چون فرض کنیم عدد اضلاع متدرجا ترقی کند تا مالانهایه معلوم است که مقدار زاویه تغیر

ترقی کند و آنوقت که ع را بی اندازه بزرگ فرض کنیم کسر $\frac{1}{ع}$ کوچکتر شود از هر مقدار مفروض
و معلوم شود که مقادیر متتالیه زاویه کثیرالاضلاع منتظم حدش دو قائمه است
و همچنین اگر اب را بر د نصف کنیم و دب را بر د' و هکذا

ا ــــــــ د ــ د' ــ د'' ــ ب

آنوقت می‌بینیم که خطوط اد و اد' و اد'' .... حد مقادیر شان اب است
و از اینگونه امثال بیشمار میتوان آورد
ولی باید این فقره را نیز دانست که ممکن است مقداری تغییر کند و حدی نداشته باشد
مثلا مجموع ع جمله اول تناسب هندسی افزایش مقدار ع منفرد و مجموع را حدی نباشد
جز در اینصورت که تناسب متناقص باشد ولی اگر متزاید باشد حد مجموع الی غیرنهایه است

قضیّه‌ی همزا

هرگاه دو مقدار تغییرپذیر ح و م در ضمن تغییر و تقرب بحدشان پیوسته
متساوی باشند و حدشان ح' و م' نیز متساویند
برهان فرض میکنیم دو تغییرپذیر ح و م در تحت حد خود نباشند و تجاوز نکنند و این دو را
اقرار میدهیم ح' = ح + ب   م' = م + ه
(ب و ه ممکن است کوچکتر از هر مقدار مفروض شوند)
و چون تساوی دویم را از اول تفریق کنیم این تساوی حاصل میشود ح' − م' = ح − م + ب
− ه = ب − ه (چونکه بنابر فرض ح = م)
حال اگر ما بین ح' و م' تفاضلی مثل ل فرض کنیم این تساوی حاصل شود ل = ب − ه
و اینمحال است چونکه ب و ه و بنابراین تفاضلشان از هر مقدار مفروضی کوچکتر شوند
و اگر دو تغییرپذیر در تقرب بحد خود متناقص میشدند نه متزاید دلیل مانند مذکور بود

قضیهٔ یازدهم

هرگاه دو متساوی ح و د حاصل ضرب بسمت حدّ خود ط و ی میل کنند خود حاصل ضرب ح × د حدش ط × ی باشد

برهان این دو تساوی را اقرار میدهیم ط = ح + ب و ی = د + ه

و آنها را در هم ضرب میکنیم چنین میشود

$$ط × ی = ح د + د ب + ح ه + ب ه$$

و چون هر قدر ح و د بسمت حدّ خود میل کنند دو مقدار ب و ه بینهایت تنزل میکنند سه جمله د ب و ح ه و ب ه بی اندازه کوچک شوند پس مجموعشان نیز هرچند میخواهیم کوچک توانند شد پس مقدار ح د هرچند بخواهیم تواند نزدیک شد به ط ی

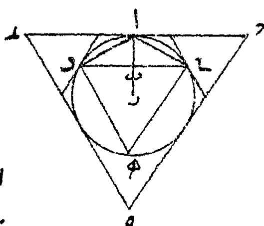
و چون حکم در حاصل ضرب دو عامل مبرهن شد بلا زحمت میتوان آنرا در چند عامل جاری ساخت

نتیجه — حدّ خارج قسمت دو متغیر ح و د مساویست با خارج قسمت دو حدّشان

قضیهٔ دوازدهم

اولا — محیط دایره حدّیست مشترک که بسمتش میل میکنند دو محیط دو کثیر الاضلاع منتظم متشابه محاطی و محیطی که عدد اضلاعشان بتضاعیف ترقی کند

ثانیا مساحت دایره حدّیست که بسمتش میل میکنند سطوح همان اشکال



اولا فرض میکنیم ط د ه کثیر الاضلاع منتظم محاطی باشد و ح ه ه کثیر الاضلاع منتظمه محیطی و طول محیط دایره مندرج است مابین دو محیط این دو کثیر الاضلاع و عدد اضلاعشان را متصل مضاعف کنیم از روی خود شکل ظاهر میشود که محیط کثیر الاضلاع محاطی روی بتزاید نهد

رمحیط

ومحیط کثیر الاضلاع محیطی روی بهت ناقص کذارد

پس این دو محیط همواره بدایره نزدیکتر میشوند هرچند عدد اضلاع بیشتر مضاعف شود و اگر همین قدر ثابت کنیم که تفاضل ما بین آنها ممکن است از هر مقدار مفروض کوچکتر شود مبرهن میشود که آنده محیط هرچند بخواهیم بدایره توانند نزدیک شد

فرض میکنیم م و مـ محیط دو کثیر الاضلاع ح ه ه و ح د هر باشد پس

م : مـ = را : رف وبتفصیل نسبت م - مـ : م = را - رب یا ب ا : را

وبنابراین م - مـ = م × ب ا / ر ا

وچون ب ا اقصر است از ا د و ا د اقصر است از رس موتر ش و قوسها موتری اندازه کوچک شوند از آنجهة که در سلسله تناسب بر نسبت ا و ½ و ¼ و ⅛ و ١/١٦ و ..... تنزل کنند و م نیز روی تنزل است و را مقدارش ثابت پس برحسب اینمقادیر در تساوی مذکور چنین نتیجه میشود که م - مـ بی اندازه بسمت صفر نزدیک شود و هو المطلوب

ثانیاً - فرض میکنیم سه و س مساحت همان دو کثیر الاضلاع باشد و مانند مذکور ثابت میکنیم که چون عدد اضلاع آنها روی ترقی نهد سه و س بی اندازه بسطح دایره نزدیک شوند و مبرهن شود که حد آنها سطح دایره است همین قدر که بنمائیم سه - س ممکن است از هر مقدار مفروض کوچکتر شود پس گوئیم بنابر ق ۸

سه : س = را² : رف² وبتفصیل نسبت سه - س : سه = را² - رب² یا ب د² : را² وبنابراین سه - س = سه × ب د² / را²

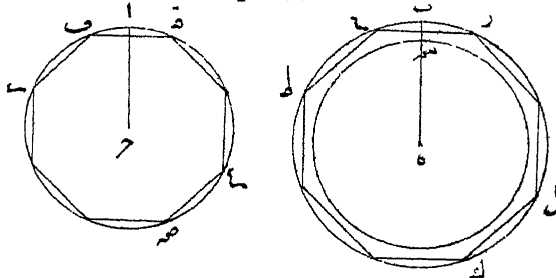
وظاهر است که این تفاضل بی اندازه مائل است بسمت صفر زیرا که چون عدد اضلاع مضاعف شود سه روی بتناقص نهد و ب د که اقصر است از ا د ممکن است بی اندازه کوچک شود و را ثابت است فهو المطلوب

تبنیه حدارتفاعات اشکال کثیرالاضلاع متتالیه محاطیه و محیطیه شعاع دایره است

قضیهٔ سیزدهم

اوّلاً - نسبت محیط دوائر بیکدیگر مثل طول اشعه انها باشد

ثانیاً - نسبت سطوح دوائر بیکدیگر مثل مربعات همان اشعه باشد



اوّلاً - محیط میکنیم در دو دایره که بشعاع ه‌ب و ح‌ا اند دو کثیرالاضلاع منتظم متشابه و م و مَ محیط آنها باشد و هَ و ن دو شعاع ه‌ب و ح‌ا و دَ و د دو محیط دایره پس ق ۸ $\frac{م}{ن} = \frac{مَ}{نَ}$

حال چون عدد اضلاع دو کثیرالاضلاع محاطی را بی اندازه تضعیف کنیم دو محیط م و مَ بی اندازه نزدیک شوند به دَ و د و بنابراین دو خارج قسمت $\frac{م}{ه}$ و $\frac{مَ}{نَ}$ میل کنند بسمت دو حدّ $\frac{دَ}{ه}$ و $\frac{د}{نَ}$ ق ۱۱ و چون از تساوی دو تغیرپذیر تساوی دو حدشان لازم آید ق ۱۰ پس $\frac{دَ}{ه} = \frac{د}{نَ}$ (۱)

ثانیاً - سطح دو دایره را ح و ح' فرض میکنیم و مساحت دو کثیرالاضلاع منتظم متشابه محاطیه را س‌ه و س پس ق ۸ $\frac{سه}{ه^۲} = \frac{س}{ن^۲}$

و چون حدّ دو مقدار $\frac{سه}{ه^۲}$ و $\frac{س}{ن^۲}$ این دو مقدار است $\frac{ح}{ه^۲}$ و $\frac{ح'}{ن^۲}$ پس ق ۱۰

ح/۲ق = ط/۲ن (۲)

شرح - از تساوی (۱) این تساوی استنباط شود

مح/ق۲ = ط/ن۲ (۳)

یعنی که نسبت محیط هر دایره بقطرش مقداریست در جمیع دوایر ثابت و این نسبت را ما در حساب و در قانون ناصری باین علامت ﻧﺢ نمودیم (وان سه حرف اول کلمات نسبت و محیط وقطر است) و در جمیع ممالک مهندسین آنرا باین علامت π بنمایند و آن حرف یونانی است وپی تلفظ شود پس نظر باختصار صورتش ما نیز متابعت جمهور نموده و در این کتاب بهمین علامت π بنمائیم و مقدار این نسبت اصم است و بتقریب استخراج شود و آن بکسر اعشار تا عدد ارقامش چنین است

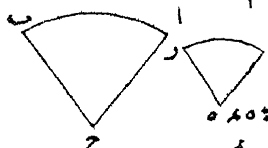
۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲ .... = π

و دستور استخراج این عدد و تقریبی را عن قریب بوجهی مختصر بیان میکنیم حال چون در تساوی (۳) بجای ط/۲ن معادلش π را قرار دهیم این تساوی حاصل میشود مح/ق۲ = π و بعد مح = ۲ π ق (۴) یعنی محیط هر دایره مساویست مضاعف π ضرب در شعاع •

تعریف - دو قوس متشابه اب و ده در نسبت دو شعاع جا و هه باشند ثانیاً دو قطاع متشابه ب جا و ه ه د در نسبت دو مربع همان دو شعاع باشند

اولاً بنا بر ق ۱۸ و ۲ قوس ب ا : محیط اج = ج : ۴ ق

و همچنین قوس ه د : محیط ه ه = ه : ۴ ق



و نظر بتساوی دو زاویه ج و ه این تناسب حاصل شود

قوس ب ا : قوس ه د = محیط جا : محیط ه ه = جا : ه ه

ثانیاً بنا بر همان ق ۱۸ و ۲ قطاع اجب : دایره جا = ج : ۴ ق

قطاع مه د : دایره ه مه = مٓه : مٓه ۴

وبنابراین قطاع ا ح ب : قطاع مه د = دایره آح : دایره مَه = اح۲ : مه۲

قضیهٔ پانزدهم

مساحت دایره مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع

بر دایره ه ا کثیرالاضلاع منتظمی محیط میکنیم و فرض میکنیم م محیط این کثیرالاضلاع باشد و سه سطحش و ه شعاع ه ا باشد پس سه = م × ه/۲

وچون عدد اضلاع کثیرالاضلاع محیطی را بی اندازه تضعیف کنیم حاصل ضرب م × ه/۲ بی اندازه نزدیک شود بمحیط ه × ه/۲ وحد سه سطح دایره دیانیس ف ۱۰

دایره ه = محیط ه × ه/۲ وسابق ذکر شد که محیط ه = ۲ π ه پس بعد از تبدیل

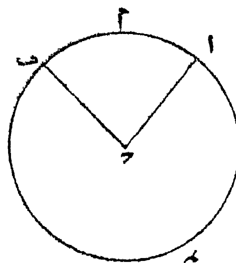
مساحت دایره ه = ۲ π ه × ه/۲ = π ه۲

مثال فرض میکنیم ه = ۳ ۴/۳ ومقدار π را بتقریب ۳٫۱۴۱۵ فرض میکنیم پس

مساحت دایره ه = ۲۸٫۲۷۳۵

نتیجه مساحت قطاع دایره مساویست با حاصل ضرب طول قوسش در نصف شعاع

برهان نسبت قطاع ا ح ب بتمام دایره مثل قوس ا م ب است بتمام محیط ا ب د و ۱۸ ف ۲



یا مثل ا م ب × اح/۲ است به ا ب د × اح/۲

ومساحت تمام دایره مساویست ا ب د × اح/۲

پس مساحت قطاع ا ح ب این باشد ا م ب × اح/۲

مثال فرض میکنیم شعاع اح = ۱ ۴/۱ وقوس ا م ب مقدارش ه ۳/۴ پس طول این

این قوس از روی این تناسب بدست آید قوس ا م ب : ۲ π ه = ۶۰ : ۳۶۰

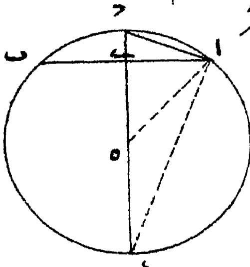
وبنابراین قوس ا م ب = $\frac{۲\pi ه \times ۶۰}{۳۶۰} = \frac{\pi \cdot ۵}{۳} = \frac{\pi \cdot ۱۲}{۳} = ۴\pi$

پس قطاع ا ح ب = ۴ π × ۶ = ۲۴ π = ۷۵٫۳۹۸۴ ذرع مربع

درمسائل متعلقه باشکال کثیرالاضلاع منتظمه واستخراج نسبت محیط بقطر

قضیهٔ ۴ مسئله

درصورتیکه معلوم باشد ضلع کثیرالاضلاع منتظم محاطی وشعاع دایرهٔ ه ح میخواهیم معلوم کنیم ضلع کثیرالاضلاع منتظمه محاطی دیگرراکه عدداضلاعش مضاعف کثیرالاضلاع مفروض باشد



فرض میکنیم ا ب = ع و ه ح = ه و ا ح = ط

ودوخط ا د و ا ه را وصل میکنیم آنوقت در مثلث قائم الزاویه ح ا د این تساوی حاصل شود $\overline{اح}^2$ = ح د × ح ب یا $ط^2$ = ۲ ه × ح ب

وچون ح ب = ح ه ـ ه ب = ه ـ ه ب

ودر مثلث قائم الزاویه ا ه ب این تساوی حاصل شود ه ب = $\sqrt{ه^2 - \overline{اب}^2} = \sqrt{ه^2 - \frac{ع^2}{۴}}$

پس ح ب = ه ـ $\sqrt{ه^2 - \frac{ع^2}{۴}}$

وبنابراین $ط^2$ = ۲ ه × (ه ـ $\sqrt{ه^2 - \frac{ع^2}{۴}}$) (۱)

وبالعکس اگر ط معلوم باشد بتوان ع را استخراج نمود ودرینصورت باید دستور (۱) را نسبت به ع حل نمود آخراین دستور حاصل میشود

$ع^2 = \frac{ط^2 \cdot (۴ ه^2 - ط^2)}{ه^2}$ (۲)

مثال دستور (۱) فرض میکنیم ع ضلع مسدس باشد وبنابراین ع = ه واز این قرار

طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاطی چنین میشود

$$ط = \sqrt{2ق\left(ق - \sqrt{ق^2 - \frac{ق^2}{4}}\right)} = \sqrt{2ق^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = ق\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

مثال دستور (۲) فرض میکنیم ط ضلع معشر باشد و میخواهیم ضلع مخمس را معلوم کنیم
وازسابق میدانیم که $ط = \frac{ق(\sqrt{5} - 1)}{2}$ پس

$$ل^2 = \frac{\frac{ق^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}\left(4ق^2 - \frac{ق^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}\right)}{ق^2} = \frac{ق^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right)$$

وبنابراین $ل = \frac{ق}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

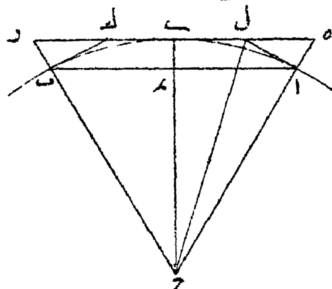
تبصره - چون مربع شعاع را بر مربع ضلع معشر بیفزائیم این مجموع

$$ق^2 + \frac{ق^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}$$

مساوی میشود با $\frac{ق^2(10 - 2\sqrt{5})}{4}$ که مربع ضلع مخمس باشد پس
ضلع مخمس محاطی وتر مثلث قائم الزاویه باشد که یکی از دو ضلع زاویه
قائمه اش شعاع دایره باشد و ضلع دیگرش ضلع معشر

قضیهٔ ۱ مسئله

درصورتیکه معلوم باشد ضلع کثیر الاضلاع منتظم و شعاع دایره
محیطیه اش میخواهیم استخراج کنیم ضلع کثیر الاضلاع محیطی متشابهش را



فرض میکنیم اب = ل ، ج ا = ق
و ه د = م
و بتشابه دو مثلث ه ج د و ا ج ب

ه د : اب = ج ه : ا ج

و نیز ج ه : ج ا = ج ح : ج ط

پس نظر بنسبت مشترکه ه د : اب = ج ح : ج ط یا م : ل = ق : ج ط (۱)

و در مثلث قائم الزاویه ا د ه این تساوی حاصل شود د ه = √(ا د² − ا ه²) = √(ه² − ل²/۴)

پس م : ل = ه : √(ه² − ل²/۴) و بنابراین م = ۲ ل ه / √(۴ ه² − ل²)

قضیهٔ ۱۸ مسئله

در صورتیکه معلوم باشد ضلع اب از کثیرالاضلاع منتظمی که دارای ع ضلع باشد و شعاع دا دایرهٔ محیطیه میخواهیم مساحت آن کثیرالاضلاع را استخراج کنیم

فرض میکنیم در شکل سابق اب = ل و دا = ه و س مساحت شکل باشد

پس س = ع ل × ده/۲ و ده = √(ه² − ل²/۴) = ۱/۲ √(۴ ه² − ل²)

پس س = ع ل √(۴ ه² − ل²) / ۴

مثال مطلوب است مساحت مسدس منتظمه و ل = ه و ع = ۶ پس

س = ۶ ه √(۴ ه² − ه²) / ۴ = ۳ ه² √۳ / ۲

تبنیه - میتوان از روی همان مفروضات در شکل سابق مساحت کثیرالاضلاع منتظم محاطی را استخراج نمود که دارای ۲ع ضلع باشد

نقطهٔ ج وسط قوس اب است و خط اج را وصل میکنیم و سطح کثیرالاضلاع مطلوب که سَ فرضش میکنیم مرکب میشود از ۲ع مثلث متساوی که یکی از آنها ا د ج است

و ا د ج = د ج × اه/۲ = ه × ل/۴

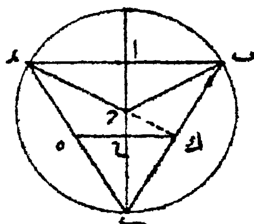
پس سَ = ۲ع × ه × ل/۴ = ع ه ل/۲

مثلاً میخواهیم مساحت دوازده ضلعی منتظم محاطی را معلوم کنیم

ل = ه و ع = ۶ و بنابراین سَ = ۶ ه²/۲ = ۳ ه²

قضیهٔ ۱۹ مسئله

در صورتیکه مفروض باشد از دایره شعاع ج م = د و از کثیر الاضلاع منتظم محاطی ارتفاع ج ا = ن میخواهیم معلوم کنیم شعاع دَ و ارتفاع نَ از کثیر الاضلاع منتظمی را که عدد اضلاعش مضاعف کثیر الاضلاع مفروض باشد و محیطش مساوی ان



فرض میکنیم ب م ضلع کثیر الاضلاع منتظم مفروض باشد و ج مرکزش و ارتفاع ج ا را امتداد میدهیم تا محیط را بر نقطه ـ قطع کند و دو خط ب ـ و م ـ را وصل میکنیم انوقت ب ـ م زاویه مرکزیه کثیر الاضلاع مطلوب میشود چونکه مقدارش نصف ب ج م است و چون عمود ج ک را بر ب ـ فرود آوریم و ک ه را بموازات ب م رسم کنیم طول ک ه نصف ب م میشود و بنابراین ضلع کثیر الاضلاع جدیدست و ـ ک شعاعش باشد و ط ـ ارتفاعش و این تساوی حاصل شود

$$\text{ط ـ} = \frac{\text{ا ـ}}{۲} = \frac{\text{ا ج} + \text{ج ـ}}{۲}$$

$$\text{یا}\quad \text{نَ} = \frac{\text{د} + \text{ن}}{۲} \qquad (1)$$

و خلاصه در مثلث قائم الزاویه ج ک ـ این تساوی حاصل شود $\text{ک ـ}^{۲} = \text{ـ ج} \times \text{ط ـ}$

$$\text{یا}\quad \text{دَ} = \sqrt{\text{د} \times \text{نَ}} = \sqrt{\text{د} \times \frac{(\text{د} + \text{ن})}{۲}} \qquad (۲)$$

شرح این نکته هم از اصل شکل ظاهرست و هم از روی دستور که نَ بزرگتر است از ن و برخلاف دَ کوچکتر است از د و از این قرار در کثیر الاضلاع جدید تفاضل مابین شعاع و ارتفاع کمتر است از آنچه در کثیر الاضلاع مفروض داشتند

و چون بهمین وجه کثیر الاضلاع دوم را بسیمی تحویل کنیم و آنرا بچهارم و بهذا عاقبت بکثیر الاضلاعی برسیم که تفاضل مابین شعاع و ارتفاعش کوچکتر باشد از هر مقدار مفروضی

برهان - درمثلث ب ح ا این تساوی حاصل شود

ب ح - ح ا < ب ا یا ه - ن < ب ا

ولی ب ا که نصف ضلع کثیر الاضلاع باشد بعد از آنکه عدد اضلاع بی اندازه تضعیف شد کوچکتر از هر مقدار مفروضی شود و بنابراین ه - ن نیز تواند کوچکتر شود از هر مقداری که قابل اشاره حتی باشد

قضیه ۲ مسئله

میخواهیم مقدار تقریبی نسبت محیط را بقطر استخراج کنیم

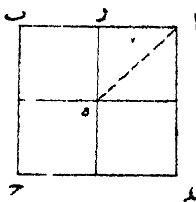
در اشکال سابقه مبرهن شد که محیط ه = ۲ π . ه و دایره ه = π ه^۲

واز آنها این دو تساوی استخراج شود π = محیط ه / ۲ ه (۱) و π = دایره ه / ه^۲ (۲)

واز اینجا چهار قاعده در استخراج مقدار π استنباط شود

زیرا که در دستور (۱) میتوان محیط را معلوم فرض کنیم و شعاعش را استخراج نمود یا بالعکس شعاع را معلوم فرض کرد و محیط را استخراج نمود و در دستور (۲) نیز میتوان شعاع را معلوم فرض کرد و مساحت دایره را استخراج نمود یا مساحت را معلوم فرض کرد و شعاع استخراج نمود

و چون بنای ما بر اصول است بذکر یک قاعده اکتفا کنیم و آن قاعده اول است



که فرض میکنیم محیط ۴ واحد باشد و میخواهیم از آن روی طول شعاعش را معلوم کنیم شکل مربعی بر واحد طول رسم میکنیم پس محیطش چهار واحد شود

و فرض میکنیم ه و ن شعاع و ارتفاع این مربع باشد

آنوقت ه = √۲ / ۲ و ن = ۱ / ۲

حال بشکل سابق این مربع را تحویل میکنیم بمنحنی که محیطش مساوی آن باشد پس این دو دستور حاصل شود $ه_{۱} = \sqrt{\frac{\sqrt{۲}+۲}{۸}}$ و $ن_{۱} = \frac{\sqrt{۲}+۱}{۴}$

وبعد شعاع $ه_{۲}$ وارتفاع $ن_{۲}$ از کثیر الاضلاعی را استخراج کنیم که صاحب ۱۶ ضلع باشد و بهمانطور چون بهمین طریق همواره پیش رویم میرسیم بکثیر الاضلاعی که محیطش همان چهار واحد باشد و تفاضل مابین دو شعاعش $ه_{م}$ و $ن_{م}$ بحدی کوچک شد که بخواهیم و چون دو دایره رسم کنیم یکی بشعاع $ه_{م}$ و دیگر بشعاع $ن_{م}$ محیط اولی بزرگتر باشد از ۴ و محیط ثانی کوچکتر از آن پس شعاع دایره که محیطش درست چهار واحد باشد واقع میشود مابین $ه_{م}$ و $ن_{م}$ و هر حد تقریب خواسته باشیم استخراج شود پس اگر آن دو شعاع را باعشار تحویل کنیم ظاهر است که ارقام مشترکه متعلق باشد بشعاع مطلوب

و مقادیر متتالیه شعاع و ارتفاع کثیرة الاضلاع ۴ ضلعی و ۸ و ۱۶...... تا ۸۱۹۲ ضلعی را در جدول آوردیم

عدد اضلاع	ارتفاعات	اشعه
۴	ن۱ = ۰٫۵۰۰۰۰۰۰	ه۱ = ۰٫۷۰۷۱۰۶۸
۸	ن۲ = ۰٫۶۰۳۵۵۳۴	ه۲ = ۰٫۶۵۳۲۸۱۵
۱۶	ن۳ = ۰٫۶۲۸۴۱۷۴	ه۳ = ۰٫۶۴۰۷۲۸۹
۳۲	ن۴ = ۰٫۶۳۴۵۷۳۱	ه۴ = ۰٫۶۳۷۶۴۳۵
۶۴	ن۵ = ۰٫۶۳۶۱۰۸۳	ه۵ = ۰٫۶۳۶۸۷۵۴
۱۲۸	ن۶ = ۰٫۶۳۶۴۹۱۹	ه۶ = ۰٫۶۳۶۶۸۳۶
۲۵۶	ن۷ = ۰٫۶۳۶۵۸۷۸	ه۷ = ۰٫۶۳۶۶۳۵۷
۵۱۲	ن۸ = ۰٫۶۳۶۶۱۱۷	ه۸ = ۰٫۶۳۶۶۲۳۷
۱۰۲۴	ن۹ = ۰٫۶۳۶۶۱۷۷	ه۹ = ۰٫۶۳۶۶۲۰۷
۲۰۴۸	ن۱۰ = ۰٫۶۳۶۶۱۹۲	ه۱۰ = ۰٫۶۳۶۶۱۹۹
۴۰۹۶	ن۱۱ = ۰٫۶۳۶۶۱۹۵	ه۱۱ = ۰٫۶۳۶۶۱۹۷
۸۱۹۲	ن۱۲ = ۰٫۶۳۶۶۱۹۶	ه۱۲ = ۰٫۶۳۶۶۱۹۶

و از اینقرار دایره که محیطش چهار واحد باشد شعاعش این میشود ۰٫۶۳۶۶۱۹۶ ...

پس نسبت محیط بقطر چنین باشد ...... ۳٫۱۴۱۵۹۲۶ = $\frac{۴۰۰۰۰۰۰۰}{۱۲۷۳۲۳۹۲}$

ارشمیدس مهندس مشهور که ۲۸۷ سال شمسی قبل از مسیح در سراکوزه متولد شده مقدار
این نسبت تقریباً تا $\frac{۲۲}{۷}$ بدست آورده و متیوس مهندس که در حدود هزار هجری حیات
داشته اینمقدار را $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ بدست آورده و چون آنرا باعشار تحویل کنیم تا ۶ رقمش موافق آید
و طریق ضبطش چنین است که اعداد فرد ۱ و ۳ و ۵ هر کدام را دو مرتبه از یسار بیمین بنویسید تا صورت
۱۱۳۳۵۵ و سه رقم اول مخرج کسر قرار دهید و سه رقم ثانی را صورت
و در عصر ما تا یکصد و پنجاه و چهار رقم اعشارش بدست آمده و اگرچه هرگز از آن هفت رقم
بیشتر استعمال نکنند ولی چون علامت ترقی و تکمیل علم است ما در اینجا آوردیم

۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳ –
– ۲۷۹۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱۶۹۳۹۹۳۷۵۱۰۵۸۲۰ –
– ۹۷۴۹۴۴۵۹۲۳۰۷۸۱۶۴۰۶۲۸۶۲۰۸۹۹۸ –
– ۶۲۸۰۳۴۸۲۵۳۴۲۱۱۷۰۶۷۹۸۲۱۴۸۰۸۶ –
– ۵۱۳۲۸۲۳۰۶۶۴۷۰۹۳۸۴۴۶۰۹۵۵۰۵۸۲ –
– ۳۷۱۷۲۵۳۵۹۴۰۸۱۲۸۴۸۰۲ . . . .

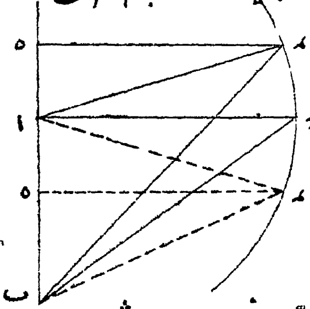
ضمیمه مقاله چهارم

تعریف - در میان جمیع مقادیریکه از یکنوع باشند اعظم را بلغت لاتین ماکزیمم گویند
و اصغر را مینیمم و این دو کلمه اکنون در جمیع لغات بهمین دو معنی معروف باشند
و ما نیز در مقام ضرورت استعمال کنیم مثلاً میان جمیع اوتار که مابین دو سر دو نقطه
محیط دایره وصل شوند قطر ماکزیمم است و میان جمیع خطوطیکه از نقطه مفروضه
بخطی مفروض وصل شوند عمود مینیمم است

اشکال متساویة الدور آنها باشند که طول محیطشان برابر باشند

قضیهٔ اول

میان جمیع مثلثاتیکه ترکیب شوند از دو ضلع مفروض بنا بر آنکه زاویهٔ حادثه ما بین آنها تغیر پذیر باشد و اختیاری اعظم مثلثی است که از دو ضلعش زاویهٔ قائمه حادث کنند



مثلا در دو مثلث ب ا د و ب ا د که ضلع آب مشترک است وضلع ا د = ا د و زاویه ب آ د قائمه گوئیم مثلث ب ا د اعظم است از مثلث ب ا د که زاویهٔ آ در آن حاده باشد یا منفرجه

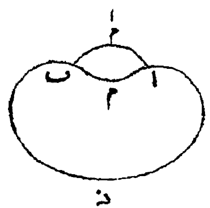
برهان قاعده اب چون در همه مشترک است اندو مثلث بر نسبت دو ارتفاع ا د و د ه باشند ولی عمود د ه اقصر است از د و مائل متساوی ا د و ا د پس مثلث ب ا د کوچکتر است از مثلث ب ا د و اینحکم کلی است در سایر مثلثات

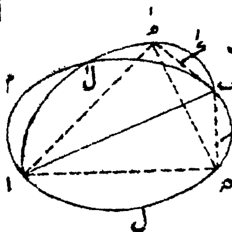
قضیهٔ دوم ۲

در جمیع اشکال مسطحهٔ متساویةالدور سطح دایره اعظم باشد

اولا اینفقره معلوم است که بر فرض اتحاد طول محیط اشکال بیشماری پیدا میشود که از حیثیت صورت و وسعت مختلف باشند ولی این اختلاف بی اندازه نباشد و وسعت شکل بحد معینی ترقی کند پس فرض میکنیم معلوم است بین همه اشکال متساویةالدور یک شکل اعظم یا بیشتر موجود باشند

ثانیاً آنشکل که در محیط مفروض سطحش اعظم است محدب باشد زیرا که اگر در خط مسدود و غیر محدب ا م ب قطعهٔ مقعر ا م ب را حول دو نقطه ا و ب دوران دهیم تا بوضع ا م ب قرار گیرد شکل جدید ا م ب





محیطش برابر شکل اول است ولی سطحش اعظم از او است
ثالثاً اگر ا م ب ه شکل اعظم باشد بمحیط مفروض و خط ا ب
آن محیط را نصف کرده باشد گوئیم سطح شکل را نیز بدو قطعه متعادل
قسمت نموده زیرا که اگر نگوئید قطعه ا ه ب اعظم است
از ا م ب آنرا حول خط ا ب دوران میدهیم تا قرار گیرد بر ا ه' ب آنوقت شکل ا ه ب ه'
محیطش مساوی میشود با ا م ب ه و مساحتش اعظم پس شکل مفروض ا م ب ه اعظم نمی شود
از آنچه ذکر شد نیز معلوم میشود که اگر ا م ب ه شکل اعظم باشد ا ه' ب ه نیز اعظم است و در
شکل اخیر هر عمودی که بر ا ب اخراج کنیم مثل ه ه' بآن خط نصف میشود بهم وجهی که دو
مثلث ا ه ب و ا ه' ب متساوی میگردند
بعد از این مقدمات اگر در زاویها ه ب و ا ه' ب قائمه نباشند میتوان سطح هر دو مثلث
ا ه ب و ا ه' ب را یکمرتبه وسعت داد بی آنکه تغیری در طول اضلاع ا ه و ه ب و ا ه'
و ه' ب عارض شود و نه در طول قطعات ا ل ه و ه ل ب و ا ل' ه' و ه' ل' ب بلی
همان قاعده ا ب تنها تغیر کند پس با نمط سطح شکل وسعت یابد بی آنکه طول محیطش تغیر کند
و این خلاف فرض است پس دو زاویه ه و ه' قائمه باشند و نقطه ه که ما فرض نمودیم اختیاری
بود در هر جای محیط ا ه ب میتوان قرار داد پس از این خط ا ب شکل نصف دایره است
بنابراین معلوم شد که اگر خطی شکل اعظم را نصف کند قطعه اش نصف دایره است پس خود شکل دایره تام است

قضیهٔ ششم

میان جمیع اشکال مسطحهٔ متساویة الوسعة دایره محیطش اقصر است
برهان اگر شکلی یافت شود بوسعت م که محیطش اقصر از دایره باشد و مساحتش برابر
آن میتوان بحکم قضیهٔ سابقه مبدل گردانید بدایره که صاحب همان محیط باشد و سطحش

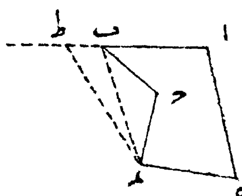
اعظم از

اعظم باشد از م

پس این دایره ثانی سطحش اعظم شود از دایره اول و محیطش اقصر و این محالست

قضیهٔ چهارم

هر کثیر الاضلاع مثل اب جده را که دارای یک زاویه مقعر باشد میتوان مبدل نمودش بکثیر الاضلاع محدب که وسعتش بیشتر باشد و محیطش برابر و یک ضلعش کمتر

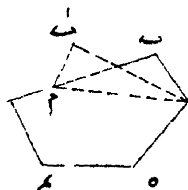


برهان چون اب را امتداد دهیم نقاط مختلفه اش را وصل کنیم بنقطه د مجموع ب ط + ط د روی بتزاید ابتدا از ب د الی غیر نهایه پس را بجائی نقطه یافت شود مثل ط که انجا ب ط + ط د = ب ج + ج د

و در آن نقطه کثیر الاضلاعی ترکیب شود مثل اب ط د ه که وسعتش ظاهرا اعظم است از شکل مفروض و محیطش برابر است و یک ضلع کمتر دارد

قضیهٔ پنجم

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویة الدوری که عدد اضلاعشان متساوی باشد کثیر الاضلاع منتظم اعظم است

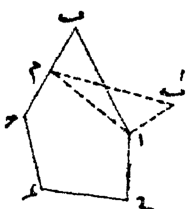


برهان در اثبات حکم مذکور باین وجه مشی میرویم که اگر کثیر الاضلاعی جمیع اضلاعش متساوی نباشند و همچنین جمیع زوایایش در جمله اشکال متساویة الدوری که بیک عدد اضلاع باشند چنین شکل اعظم نتواند شد

اولا فرض میکنیم کثیر الاضلاع اب جده صاحب ع ضلع باشد و اب ز ب ج

وبر ب ج نقطه م را انقدر نزدیک به ج فرض میکنیم که باز اب > ب م و بعد زاویه
ام بَ را مساوی ب ا م رسم میکنیم و م بَ را مساوی اب جدا میکنیم و خط اَ بَ
را وصل میکنیم و مثلث ا بَ م مساوی میشود با مثلث ا ب م
ازاینجا معلوم شد که میتوان کثیر الاضلاع اب ج د ه را مبدل نمود به کثیر الاضلاع اَ بَ
م ج د ه که صاحب همان وسعت و همان محیط باشد جز آنکه عدد اضلاعش ٤ + ١ است
و دارای یکزاویه مقعره است زیرا که اب چون قصر است از ب م زاویه ب م ا اصغر میشود
از ب ا م یا از بَ م ا

وکثیر الاضلاع ثانی را بر قضیه سابقه میتوان مبدل نمود بشکلی دیگر که صاحب ٤ ضلع باشد
و بهمان محیط و وسعتش بیشتر باشد پس معلوم شد که در جمله اشکال متساویة الدوره ٤ ضلعی
شکل اب ج د ه مختلفة الاضلاع اعظم نیست



ثانیاً در کثیر الاضلاع ٤ ضلعی اب ج د ع فرض میکنیم
زاویه ا > ب و نقطه م را انقدر نزدیک به ب فرض
میکنیم که زاویه م ا ج باز اعظم باشد از ا م ج
و زاویه م اَ بَ را مساوی ا م ب رسم میکنیم و ضلع اَ بَ را مساوی م ب جدا میکنیم و خط م بَ
را وصل میکنیم و مثلث م اَ بَ مساوی میشود با مثلث ا ب م و کثیر الاضلاع اَ بَ م ج د
وسعت و محیطش برابر میشود با اب ج د ع ولی عدد اضلاعش ٤ + ١ است و دارای یکزاویه
مقعره است زیرا که چون ا م ج + ا م ب = ٢ قائمه پس م ا ج + م اَ بَ > ٢ قائمه
و این کثیر الاضلاع را میتوان مبدل نمود بشکلی دیگر که صاحب ٤ ضلع باشد و بهمان محیط و وسعتش
بیشتر پس اب ج د ع اعظم نیست

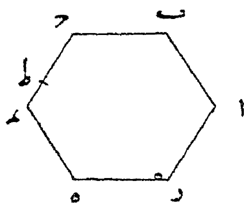
قضیه ششم

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویة الوسعه که عدد جملهٔ اضلاعشان متساوی باشد کثیر الاضلاع منتظم محیطش اقصر است

برهان اگر کثیر الاضلاع غیر منتظمی که صاحب ع ضلع باشد و بوسعت م محیطش اقصر شود از کثیر الاضلاع منتظمی که بهمان وسعت باشد و صاحب همان عدد اضلاع میتوانیم بحکم قضیه سابقه مبدل کنیم آنرا بکثیر الاضلاع منتظمی که بهمان دوره باشد و صاحب ع ضلع و وسعتش سو اعظم باشد از م پس این کثیر الاضلاع منتظم ثانی عدد اضلاعش برابر بیشد و محیطش اقصر و وسعتش بیشتر و این محالست

قضیه مفتم

از دو کثیر الاضلاع منتظم متساویة الدوره آنکه عدد اضلاعش بیشتر باشد اعظم است



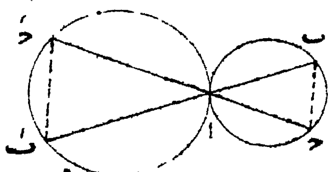
برهان فرض میکنیم اب ج د ه و کثیر الاضلاع منتظم شش ضلعی باشد و نقطه ط را بر یکی از اضلاع نشان میکنیم و آنوقت میتوان شکل کثیر الاضلاع غیر منتظم هفت ضلعی فرض نمود که زاویه حاده بین ضلعش ط ه و ط د دو قائمه باشد و چنین کثیر الاضلاع بنا بر قضیه ۵ کوچکتر است از کثیر الاضلاع منتظم هفت ضلعی که بهمان دوره باشد فهو المطلوب

مسطحات

احکام مبرهن نمودنی

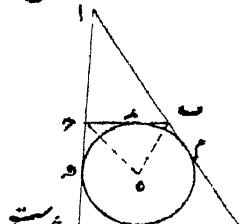
اول شکلی که رؤس ویرا اوساط اضلاع هر ذواربعه اضلاع باشد متوازیه الاضلاع است

۲ - از نقطه مفروضه در درون مثلث متساویة الاضلاع چون سه عمود بر اضلاعش فرود آوریم مجموع آنها مقداری شود ثابت و این حکم را در نقطه خارج مثلث نیز تحقیق کنید و ببینید چه صورت پیدا میکند



۳ - چون بر نقطه تماس ا از دو دایره مماس ب دو قاطع ب بَ و ح حَ را مرور دهیم ثابت کنید که دو خط ب ح و بَ حَ متوازی هستند

۴ - در هر ذواربعه اضلاع محیط بر دایره مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دو ضلع دیگر (عکس این مسئله نیز صحیح است)



۵ - دایره ه را مماس میکنیم بدو ضلع زاویه ا و خط ب د ح را مماس میکنیم بدایره و منتهی مینمائیم بدو ضلع زاویه پس مبرهن کنید که اولا محیط مثلث ا ب ح ثابت است در هر جا از قوس م د ه نقطه تماس فرض شود و ثانیا مقدار زاویه ب ه ح ثابت است

۶ - چون مواقع سه ارتفاع مثلثی را با بین هم وصل کنیم مثلثی جدید ترکیب شود که خطوط منصف الزوایایش ارتفاعات مثلث اول باشند

۷ - مواقع سه ارتفاع مثلث و اوساط سه ضلعش بر محیط دایره واقع شوند بر هر سه

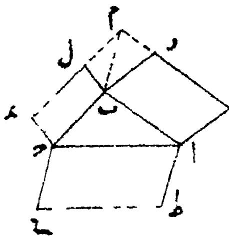
۸ - در شکل ذواربعه اضلاع چون بر هر سه ضلع متوالیش دایره مماس کنیم از مراکز چهار دایره مماسه که بدست می آید ذواربعه اضلاعی ترکیب شود که قابل محاط شدن در دائره باشد

۹ - دو خط منصف دو زاویه حادثه مابین هر دو ضلع متقابل ذواربعه اضلاع محاطی زاو

قائمه متقاطع شوند

۱۰- چون از نقطهٔ مفروضه بر دایرهٔ محیطیه بر مثلثی سه عمود بر اضلاع آن مثلث فرود آوریم مواقع انها بر خطی مستقیم واقع شوند

۱۱- بر دو ضلع اب و ب ج از مثلث اب ج دو متوازی الاضلاعی مثل اب ره و ب ج ل رسم کنیم و دو ضلع ه د و ه ل را امتداد میدهیم تا نقطهٔ م و خط م ب را وصل میکنیم و بالجمله بر ضلع اج متوازی الاضلاعی رسم میکنیم که ضلع جی و رش مساوی و موازی باشد با م ب پس ثابت کنید که این متوازی الاضلاع معادلست با مجموع دو شکل دیگری و از اینجا شکل عروس را اشباط نمائید



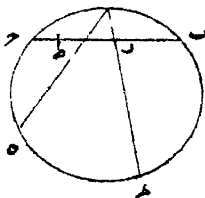
۱۲- سه ارتفاع هر مثلث بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۳- خطوط واصله ما بین رؤس مثلث و اوساط اضلاعش بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۴- نقطهٔ تقاطع سه ارتفاع مثلث و نقطهٔ تقاطع خطوط منصف قواعدش و مرکز دایرهٔ محیطهٔ اش بر خطی مستقیم واقع شوند و فاصله ما بین دو نقطه اول مضاعف فاصله ما بین دو نقطهٔ اخیرست

۱۵- چون از نقطهٔ مفروضه دو خط رسم کنیم که قاطع دایره شوند و عمود بر همدیگر مجموع دو مربع دو وتر مقداری شود ثابت

۱۶- چون سه دایره دو بدو متقاطع شوند سه وتر فصل مشترک آنها بر یک نقطه متقاطع شوند



۱۷- چون از نقطهٔ اوسط قوس ب ج دو قاطع اد و اه را رسم کنیم چهار نقطهٔ د و ط و ه بر محیط دایره واقع شوند

۱۸- چون سه دایره همدیگر را دو بدو مماس کنند

خطوط مماسی که بر آن نقاط مماس کنند بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۹- مجموع دو مربع دو قطر هر ذوات الاربعة الاضلاع مضاعف مجموع دو مربع دو خطی است که واصل شوند ما بین هر دو ضلع متقابل

۲۰- چون در مثلثی خطوط چند بموازات قاعده‌اش رسم کنیم و اقطار جمیع اشکال ذوذنقه را که باین خطوط حادث میشوند وصل کنیم نقاط تقاطع آن اقطار واقع شوند بر خط واصل ما بین راس مثلث و وسط قاعده

۲۱- در ذوات الاربعة الاضلاع محاط در دایره چون از نقطه مفروضه بر محیط چهار عمود بر اضلاعش فرود آوریم حاصل ضرب دو عمود وارد بر هر دو ضلع متقابل مساویست با حاصل ضرب دو عمود دیگر

۲۲- چون از نقطه مفروضه در درون کثیر الاضلاع منتظمه که صاحب n ضلع باشد عمودها بر جمیع اضلاعش فرود آوریم مجموع آنها مساوی شود با n برابر شعاع دایره محاطیه روش

۲۳- چون از جمیع رؤس کثیر الاضلاع منتظم عمودها فرود آوریم بر خط مار بر مرکزش مجموع آن عمودهائیکه واقع شده باشند در یک سمت خط مساویست با مجموع عمودهای واقعه در سمت دیگر

۲۴- چون دایره را ملغزانیم و بچرخانیم در دایره ساکن ثابت الوضعی که شعاعش مضاعف دایره اول باشد بر وجهی که دو دایره همواره مماس همدیگر باشند و نقطه بر محیط دایره اول فرض نموده باشیم این نقطه در تمام حرکت دایره خطی مستقیم رسم کند

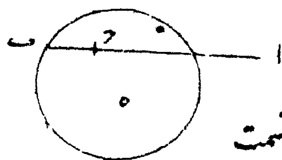
در امکنه هندسیه یافتنی

۱- معلوم کنید مکان هندسی نقاطی را که مجموع دو فاصله هر کدامشان از دو خط مفروضه مساوی شود با طول خط مفروضی دیگر

۲- معلوم کنید مکان نقاطی را که تفاضل دو فاصله هر کدامشان از دو خط مفروض مساوی شود با خطی دیگر

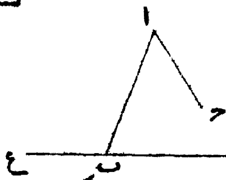
۳- معلوم کنید مکان هندسی مراکز دوایری را که مرور کنند بر دو نقطه مفروضه

۴- معلوم کنید مکان هندسی مراکز دوایری را که بیک شعاع مفروض تماس کنند خط مفروضی را
۵- معلوم کنید مکان هندسی مراکز دوایری را که بشعاع مفروضی تماس کنند دایرهٔ مفروضه را
۶- بر جمیع نقاط دایره خطوط متوازیه مرور میدهیم و از جمیع آنها طول معینی جدا میکنیم پس معلوم کنید مکان هندسی اطراف این خطوط را
۷- معلوم کنید مکان هندسی اوساط اوتاری از دایره را که جمیعاً مرور کنند بر نقطهٔ مفروضه
۸- معلوم کنید مکان هندسی نقاطی را که مواقع اعمده وارد از هر کدامشان بر سه ضلع مثلثی بر استقامت خطی واقع شوند
۹- معلوم کنید مکان هندسی نقاطی را که فاصلهٔ هر کدامشان از دو خط مفروض بر نسبت معینه باشند
۱۰- مطلوبست مکان هندسی نقاطی که مجموع یا تفاضل دو مربع دو فاصلهٔ هر کدامشان از دو نقطهٔ معین مساوی باشد با مربع مفروضی
۱۱- دو دایره مفروضست و مطلوب باشد مکان هندسی نقاطیکه خطوط مماسه از آنها بر آن دو دایره متساوی باشند



۱۲- بر نقطهٔ ا خط اب مرور داده و بر دایره منتهی نموده ایم و آنرا بر ح چنان قسمت کرده ایم که اب : اح = م : ع و مطلوبست مکان هندسی نقاط ح
۱۳- بر نقطهٔ ا خط اب گذشته است و منتهی شده است بدایرهٔ ه و بر اینخط نقطهٔ ح چنان اختیار شده که اب × اح = س۲ و مطلوبست مکان نقاط ح همین دو مسئله را حل کنید بنا بر آنکه دایره بخطی مستقیم مبدل شود
۱۴- بر نقطهٔ ا خطی مثل اب مرور میدهیم که منتهی شود به خط مفروض س ع و

اح را چنان مرور میدهیم که زاویه ب اح مساوی شود بزاویه مفروضه و بروجهیکه اب : اح = م : ن یا آنکه اب × اح = ك² و مطلوب است مکان نقاط ح



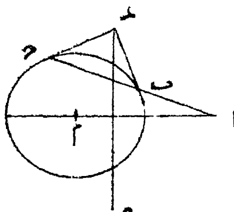
همین مسئله را حل کنید بنابر آنکه خط س ع مبدل شود بدایره س

۱۵- مطلوب است مکان نقاطی که از آنها دو دایره مفروضه را بیک زاویه معینه ببینیم

۱۶- بر دو خط متقاطع بزاویه قائمه خطی بطول معین تکیه نموده و میلغزد مطلوب است مکان اوساط اوتار مثلثاتیکه با حرکت ترکیب میشود

۱۷- مثلث متساوی الاضلاعی فرض شده و مطلوب است مکان نقاطی که فاصله هر کدام شان از یکی از رؤس مثلث مساوی شود با مجموع دو فاصله همان نقطه از دو رأس دیگر مثلث

۱۸- از نقطه ا واقعه در سطح دایره م قاطع اح را رسم نموده ایم و بر دو نقطه تقاطع ب و ح دو خط مماس و مطلوب است مکان نقاط ه



(مکان مطلوب خط ن ه است که عمود باشد بر قطر مار بر نقطه ا این خط را قطبی نقطه ا گوئیم و این نقطه را قطب خط ن ه)

۱۹- مطلوب است مکان نقاطی که مجموع مربعات ابعاد هر کدام شان از رأس مثلث متساوی الاضلاعی مساوی شود مربع مفروضی را

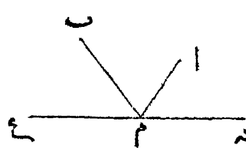
۲۰- همین مسئله را حل کنید بنابر آنکه مثلث متساوی الاضلاع مبدل شود بکثیر الاضلاع منتظمی

۲۱- مطلوب است مکان نقاطیکه مجموع مربعات ابعاد شان از اضلاع کثیر الاضلاع منتظمی مساوی شود مربع مفروضی را

مسائل حل کردنی

۱- بر نقطهٔ مفروضه خطی مرور دهید که متساوی البعد باشد از دو نقطهٔ مفروضهٔ دیگر

۲- دو نقطهٔ ا و ب مفروض است میخواهیم بر خط س ع نقطهٔ مشخص کنیم مثل م که چون وصل شود بدو نقطهٔ ا و ب دو زاویهٔ ا م س و ب م ع متساوی شوند



۳- بر نقطهٔ مفروضه خطی مرور دهید که قطع کند دو متوازی را چنانچه قطعهٔ واقعه مابین دو متوازی از آنخط مساوی شود بخط مفروضی

۴- در شکل مربع تفاضل مابین قطر و ضلعش معلوم است آن مربع را رسم کنید

۵- در مثلثی قاعده و زاویهٔ مقابله و مجموع یا انفصال دو ضلع دیگرش معلوم است آن مثلث را رسم کنید

۶- دایره بشعاع معین رسم کنید که اولاً مرور کند بر دو نقطه ثانیاً مرور کند بر نقطه و تماس کند خطی را ثالثاً تماس کند دو خط را رابعاً تماس کند خطی و دایره را خامساً مرور کند بر نقطه و تماس کند دایره را سادساً تماس کند دو دایره را

۷- از نقطهٔ مفروضه خط قاطعی بدایرهٔ مفروضه مرور دهید چنانچه وتری که از آنخط در دایره واقع شود مساوی باشد با خط مفروضی

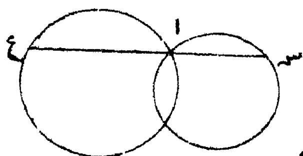
۸- بر نقطهٔ مفروضه دایره مرور دهید که تماس کند دایرهٔ مفروضه و خطی مفروض را

۹- بر نقطهٔ مفروضه دایره مرور دهید که دایرهٔ مفروضهٔ دیگر را در نقطهٔ مشخصه تماس کند

۱۰- مثلثی رسم کنید مساوی با مثلث مفروضی چنانچه اضلاعش مرور کنند بر سه نقطهٔ مفروضه

۱۱- دو دایرهٔ متقاطعه مفروض است میخواهیم بر یکی از دو نقطهٔ فصل مشترک آن خط س ع را چنان مرور دهیم که فاصلهٔ س ع واقعه مابین دو نقطهٔ فصل مشترک آنخط

و دو دایره مساوی شود خط مفروضی را



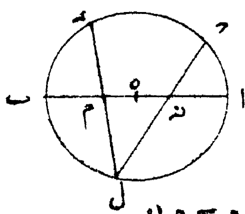
۱۲- بر نقطه ا خط س ا ع را چنان مرور دهید که س ا : ا ع = م : ن

۱۳- بر نقطه ا خط س ا ع را چنان مرور دهید که ا ع = ا س

۱۴- دو دایره مفروض است میخواهیم موازات خط معلومی قاطعی را اندو کنیم راندو کذرانیم چنانکه مجموع دو وتر واقع در دو دایره مساوی شود خط مفروضی

۱۵- در شکل ذو اربعه اضلاع معلوم است دو زاویه متقابله و دو قطر و زاویه حادثه ما بین اند و قطر حال آن شکل را رسم کنید

۱۶- دو دایره مفروض است نقطه مشخص کنید که دو مماس سوم از آن نقطه بر آن دو دایره متساوی شوند و زاویه معینه ما بین آنها حادث شود



۱۷- قوس ح د و قطر ا ب معلوم است میخواهیم بر محیط نقطه مشخص کنید مثل ل نرو که چون و خط ل د و ل ح را وصل کنیم فاصله ه م = ه ن

۱۸- در دایره مفروضه مثلث متساوی الساقین محاط کنید که مجموع قاعده وارتفاعش مساوی شود خط معلومی را

۱۹- مثلثی رسم کنید که طول سه خط و اصل از رؤس بر اوساط اضلاعش معلوم باشد

۲۰- مثلثی رسم کنید که سه ارتفاعش معلوم است

۲۱- مثلثی رسم کنید که سه زاویه و مجموع اضلاعش معلوم باشد یا سه زاویه و مساحتش

۲۲- مثلثی رسم کنید که قاعده و زاویه متقابله و نسبت دو ضلع دیگرش معلوم است

۲۳- مثلثی رسم کنید که قاعده و ارتفاع و مسطح دو ضلع دیگرش معلوم است

۲۴- بر صفحه کاغذ دو خط معلوم است چنانچه اگر امتدادشان دهیم در خارج ورق متقاطع شوند حال میخواهیم بر نقطه مفروضه خطی مرور دهیم که چون امتداد یابد منتهی شود بنقطه تقاطع موهومی آن دو خط مفروض

۲۵- در درون مثلث نقطه مشخص کنید که چون وصل شود بر رئوس آن مثلث سطحش را قسمت نماید به ۳ مثلث متعادل

۲۶- دایره بر نقطه مفروضه چنان مرور دهید که تماس کند دو دایره مفروضه دیگر را

۲۷- دایره رسم کنید که تماس کند ۳ دایره مفروضه را

۲۸- ذوذنقه رسم کنید که زوایا و طول دو قطرش معلوم است

۲۹- ۳ دایره متحدة المرکز معلوم است مثلثی رسم کنید که رئوسش واقع شوند بر محیط آنها و شکلش مشابه باشد مثلث مفروضی را

همین مسئله را حل کنید بنا بر آنکه ۳ دایره مبدل شود به ۳ خط متوازی

۳۰- در زاویه مفروضه نقطه معین است میخواهیم بر آن نقطه خطی چنان مرور دهیم که حاصل ضرب دو قطعه واقعه ما بین آن نقطه و دو ضلع زاویه مساوی شود مربع مفروضی را

۳۱- بر نقطه مفروضه در سطح دایره خطی مرور دهید که دو فاصله آن نقطه از دو نقطه فصل مشترک خط و دایره بر نسبت م باشد به ن

۳۲- بر نقطه مفروضه و بر مرکز دایره معینه دایره مرور دهید که وتر مشترک ما بین آنها مساوی شود خط مفروضی را

مقاله پنجم

در احکام خط مستقیم و سطح مستوی که واقع شده باشند در فضا و از اینرو هندسه فضائیه گوئیم و آن نه از مسطحات است و نه از مجسمات و مقدمه هندسه تصویریست که شعبه باشد از شعب علم تسطیح اجسام

تعریف

۱- خطی را بر سطحی عمود گوئیم هرگاه عمود باشد بر جمیع خطوطیکه از موقع او در آن سطح رسم شده باشند و در چنین حالت سطح را نیز بر خط عمود خوانیم

موقع عمود نقطه ایست که آنجا خط مفروض سطح مذکور را قطع نموده

۲- خطی را با سطحی موازی گوئیم در آنحالت که نتوانند متلاقی شوند اگرچه بینهایت امتداد داده شوند در جهتین و در چنین حالت سطح را نیز با خط موازی گوئیم

۳- دو سطح را متوازی گوئیم در آنحالت که نتوانند متلاقی شوند اگرچه بینهایت امتداد داده شوند در جهتین

۴- سطوح را در نمایش اشکال لابدیم محدود کنیم ولی باید آنها را غیر محدود تصور نمود

تنبیه اول کتاب ذکر شده که من باب اختصار عبارت هرجا خط و سطح مطلق گوئیم تا مقید نشده باشند مقصود مستقیم و مستوی است

قضیه اول

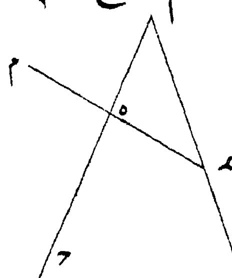
خط ممکن نیست جزئیش در سطحی باشد و جزئیش در خارج سطح

زیرا که بنابر تعریف سطح بعد از آنکه خط دو نقطه اش با آن مشارکت شد تمامش در آن واقع می شود

شرح چون خواهیم بدانیم سطح مطلقی مستوی است باید خط مستقیمی را در جهات مختلفه بر آن قرار داد و دید در تمام طولش بر آن واقع میشود یا نه

قضیهٔ دویم

بر دو خط متقاطع میتوان سطحی مرور داد و بیش از یکسطح ممکن نیست مرور دهند



اب و اح دو خط متقاطع اند بر اب سطحی مرور میدهیم و حول همین خط دوران میدهیم تا بر نقطهٔ ح بگذرد آنوقت خط اح دو نقطه اش در این سطح واقع میشود و بنابرین تماماً در این سطح خواهد بود و وضع سطح در فضا درست معین میشود

حال گوئیم که بر دو خط اب و اح بیش از همان یک سطح نتوان مرور داد

برهان. فرض میکنیم بر آنها دو سطح مرور کرده باشد و م نقطه باشد بر یکی از آن دو سطح و در سطحی که شامل این نقطه و دو خط اب و اح باشد خطی بر آن نقطه مرور میدهیم چنانچه آن دو خط را بر ه و ط قطع کند حال خط ه م چون دو نقطه اش واقع است بر دو خط اب و اح تماماً واقع شود در دو سطحی که بر این دو خط گذشته پس نقطه م نیز در آنها واقع است و دو سطح در جمیع نقاط خود مشارک میشوند پس برهم منطبق اند و یک سطح اند

نتیجهٔ ۱. مثلث اب ح یا به عبارت اخری سه نقطهٔ ا و ب و ح غیر واقعه بر یک استقامت وضع سطحی مشخص شود

نتیجهٔ ۲. دو خط متوازی اب و ح د نیز وضع سطحی مشخص شود زیرا که سابق ذکر شده که دو خط متوازی در یکسطح واقعند و بیش از یک سطح هم نمیتوان بر آنها مرور داد چونکه هر که آنها آنوقت چنانچه شامل شوند دو نقطه از خط اب و یک نقطه از ح د را یعنی سه نقطهٔ غیر واقعه بر یک استقامت

قضیهٔ سیم

فصل مشترک مابین دو سطح خطی است مستقیم

برهان. اگر در میان نقاط مشترکه در دو سطح سه نقطه پیدا میشد غیر واقعه بر یک استقامت

ب
ح
م
آنوقت چون دو سطح مفروض ... از این نقطه نیز ... منطبق ... و این خلاف فرض

قضیهٔ چهارم

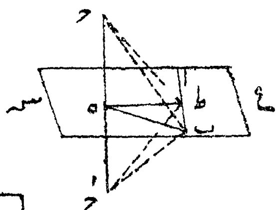
هرگاه خط ا ل عمود باشد بر دو خط ل ب و ل ج متقاطع بر موقعش در
سطح س ع پس عمود میشود بر خط ثالث ل ک که از همان موقع در همان سطح
رسم شده و بنا بر این عمود میشود بر آن سطح

برهان. در سطح س ع خط ب ج را چنان رسم میکنیم
که هر سه خط ل ب و ل ک و ل ج را قطع کند و ا ل
را باندازه خود تا نقطه اَ امتداد میدهیم و دو نقطه
ا و اَ را بسه نقطه ب و ک و ج وصل میکنیم

حال خط ل ج چون عمود است بر وسط ا اَ دو مایل ج ا و ج اَ متساوی هستند
وهمچنین دو مایل ب ا و ب اَ پس دو مثلث ب ج ا و ب ج اَ چون ضلع ب ج را مشترک
دارند و سایر اضلاعشان نظیر بنظیر متساویست متساوی باشند و اگر مثلث ب ج اَ را
حول ب ج دوران دهیم تا منطبق شود بر ب ج ا نقطه اَ واقع میشود بر ا و موضع نقطه
ک چون در این حرکت تغیر نمیکند خط ک اَ منطبق شود بر ک ا
پس خط ل ک چون دو نقطه اش ل و ک متساوی البعد شدند از طرفین خط ا اَ عمود باشد بر انخط

قضیهٔ پنجم

از نقطه مفروضه میتوان یک عمود بر سطحی اخراج نمود و بیش از یک
عمود ممکن نباشد



اول نقطه مفروضه ه را در سطح س ع قرار میدهیم و خطی
مثل ا ب در این سطح رسم میکنیم و ه ط را بر آن عمود
میکنیم و بر ا ب سطحی غیر از س ع توهم میکنیم و در آن

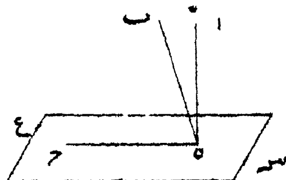
سطح خط ح ط را براب عمود میکنیم و در سطح ه ط ح خط ه ح را بر ه ط عمود میکنیم و میگوئیم ه ح عمود است بر سطح س ع

برهان بر نقطه ه خط ه ب را در سطح س ع مرور میدهیم و ح ه را باندازه خود تا نقطه خ امتداد میدهیم و خطوط ح ب و خ ب و خ ط را وصل میکنیم

حال خط اب چون عمود است بر دو خط ط ح و ط ه عمود باشد بر سطح ح ط ه و بنابراین بر خط ط ح که در آن سطح واقع است پس دو مثلث ح ب ط و خ ب ط قائم الزاویه اند و بنابراین چونکه ب ط در هر دو مشترک است و ح ط و ط خ دو مائل متساوی البعد از موقع عمود ه ط و متساوی باشند

پس ح ب = ب خ و از این قرار ب ه عمود میشود بر وسط ح خ و چون این خط عمود بود بر دو خط ه ب و ه ط عمود باشد بر سطح س ع

حال در همان شکل نقطه مفروضه ح را خارج سطح س ع فرض میکنیم و در این سطح خط اب را رسم میکنیم و ح ط را بر آن عمود میکنیم و در همان سطح خط ط ه را براب عمود میکنیم و در سطح ح ط ه خط ح ه را بر ه ط عمود میکنیم و آن عمود میشود بر سطح و دلیل بعینه همانست که در حالت اول ذکر شد

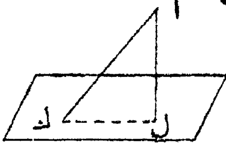


حال میگوئیم که از نقطه ه واقعه در سطح س ع ممکن نیست بیش از یک عمود بر این سطح اخراج نمود زیرا که اگر مثلاً دو عمود ه ا و ه ب ممکن بود

پس بر این دو خط متقاطع سطحی مرور میدهیم و آن قطع میکند سطح س ع را بر خط ه ح و آن وقت دو خط ه ا و ه ب در یک سطح عمود میشدند بر یک نقطه خط ه ح و این محال است

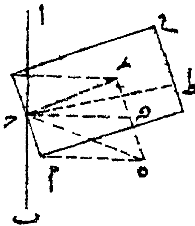
و همچنین از یک نقطه خارج سطح بیش از یک عمود ممکن نیست بر این سطح فرود آورد زیرا که

مثلا دو عمود ال و الک را ممکن بود فرود آوریم آنوقت مثلث الک دارای دو زاویه قائمه میشد و آن نیز محالست



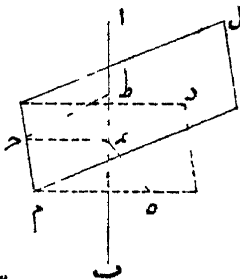
قضیه ششم

بر نقطه مفروضه میتوان یک سطح مرور داد که عمود باشد بر خط مفروضی و بیش از یک سطح عمود ممکن نیست مرور هندسه



اولا نقطه مفروضه ح را بر خط مفروض اب قرار میدهیم و دو سطح بر اب مرور میدهیم و در آنها حد و حه را عمود میکنیم بر خط اب پس ظاهر است که سطح مد مار بر این دو خط عمود شود بر اب

حال گوئیم غیر از سطح مذکور هر سطحی مثل مح که مرور نماید بر ح عمود نشود بر اب زیرا که اگر در اینصورت سطحی مرور دهیم بر اب قطع کند مد و مح را بر دو خط حد و حط که از یک نقطه و در یک سطح هر دو عمود اند بر اب و این محالست

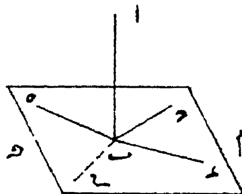


ثانیا نقطه مفروضه ح را در خارج خط اب فرض میکنیم و حد را بر آنخط عمود میکنیم و در سطحی که بر خط اب گذشته باشد ده را بر اینخط عمود میکنیم پس سطح مد مار بر دو خط دح و ده عمود باشد بر اب

حال گوئیم غیر از سطح مذکور هر سطحی مثل مل که بر نقطه ح مرور کند عمود نشود بر اب و الا سطح اب ح قطع میکرد مل را بر حط که غیر از دد است (چونکه بنا بر حالت اول نقطه ط بر د واقع نشود و الا لازم بیاید که از نقطه واقع بر خط د و سطح بر آنخط عمود کنیم)

و آنوقت

و آنوقت از نقطۀ ح دو عمود بر اب اخراج میشد

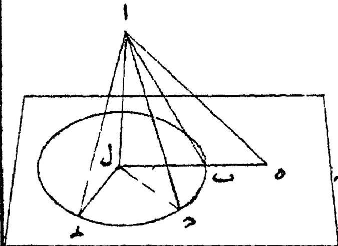


نتیجه - جمیع اعمده ب ح و ب ء و ب ه خارجه از نقطۀ ب بر خط اب واقع شوند در یک سطح عمود بر اب زیراکه چون سطح م ن را مرور دهیم بر دو خط ب ح و ب ء انسطح عمود شود بر اب و باید ثابت کنیم که سایر عمودها نیز در انسطح واقع میشوند پس اگر گوئید ب ه در آن سطح نیست سطحی مرور میدهیم بر دو خط اب و ب ه تا قطع کند م ن را بر ب ج و آنوقت لازم آید که در یک سطح و از نقطۀ ب بتوان دو عمود ب ه و ب ج را بر اب اخراج نمود

قضیۀ هفتم

چون از نقطۀ ا خارج از سطح س ع عمود ا ل و خطوط مائله ا ب و ا ح و ا ه را بر آن سطح فرود آوریم گوئیم اوّلاً طول عمود اقصر است از هر خط مائلی ثانیاً خطوط مائله که بیک فاصله باشند از موقع عمود متساویند و ثالثاً از دو مائل هر کدام بعدش از موقع عمود بیشتر باشد اطول است

برهان - اوّلاً چون مثلث ا ل ح قائمه است زاویۀ ل مائل ا ح مقابل زاویه قائمه اطول باشد از عمود ا ل ثانیاً چون دو زاویۀ ا ل ح و ا ل ء قائمه اند اگر ل ح را مساوی ل ء فرض کنیم دو مثلث ا ل ح و ا ل ء دو ضلع و زاویۀ بینهما شان متساوی میگردد و متساوی میشوند پس ا ح = ا ء



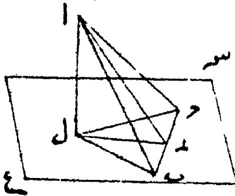
ثالثاً - اگر فاصلۀ ل ه بیشتر باشد از ل ء جزء ل ب را مساوی ل ء جدا میکنیم و ا ب

را وصل میکنیم وآنوقت اب مساوی است با اه واقصر است از اه و اد اول پس اه < اه فهو المطلوب

نتیجه چون جمیع خطوط مائله اب و اح و اد وغیره منتهی میشوند بمحیط دایره ب ده که مرکزش نقطه ل موقع عمود باشد پس اگر خواهیم موقع عمود وارد از نقطه ا بر سطحی را معلوم کنیم باید در آن سطح سه نقطه اب و ح را مشخص کرد که بیک فاصله باشند از نقطه ا (وان با ریسمان زود مشخص میشود) و بعد مرکز دایره مارّه بر این سه نقطه را معلوم کرد و آن موقع عمود مطلوب است

قضیهٔ هشتم

خط ال عمودیست وارد بر سطح سع و ب ح خطی است مرسوم در آن سطح وگوئیم چون از نقطه ل موقع عمود خط ل د را بر ب ح عمود کنیم و اد را وصل کنیم این خط عمود میشود بر ب ح



بیین برهان دو قطعه د ب و د ح را در طرفین د مساوی جدا میکنیم و خطوط ل ب و ل ح و اب و اح را وصل میکنیم آنوقت چون د ب = د ح دو مائل ل ب و ل ح متساوی شوند و چون نسبت بعمود ال دو فاصله ل ب و ل ح متساوی گشتند دو مائل اب و اح متساوی شوند و چون دو نقطه ا و د از خط اد متساوی البعد شدند از طرفین ب و ح خط اد عمود باشد بر وسط ب ح

نتیجه از بیان مذکور چنین استنباط میشود که خط ب ح عمود است بر سطح ال د چونکه عمود شده است بدو خط اد و د ل

قضیهٔ نهم

هرگاه خط ال عمود باشد بر سطح سع و خط ده موازی باشد با ال

عمود شود بر آن سطح

برهان - بر دو متوازی ال و ه د سطحی مرور میدهیم
فصل مشترکش با س ع خط ل د است و در سطح س ع
خط ب ج را عمود میکنیم بر د ل و خط ا د را وصل میکنیم
پس بنابر نتیجهٔ سابقه ب ج عمود باشد بر سطح ال د ه پس زاویه ب د ه قائمه باشد
وهمچنین ه د ل چونکه ال عمود است بر ل د و د ه بموازات اوست پس د ه
عمود شود بر دو خط د ل و د ب پس عمود شود بر سطح س ع که بر آنها گذشته

نتیجه ۱ - هرگاه دو خط ال و ه د عمود باشند بر سطح س ع پس متوازی شوند والا بر نقطه
د خطی بموازات ال رسم میکنیم آنهم عمود شود بر سطح س ع و آنوقت از نقطه د دو عمود
بر یک سطح اخراج شده

نتیجه ۲ - اگر در فضا دو خط ا و ب موازی شوند با خط ثالث ج پس بنسبت هم متوازی باشند
چونکه اگر سطحی بر ج عمود کنیم دو خط ا و ب موازی با عمود ج عمود میشوند بر آن سطح و بحکم نتیجه اول متوازی
میگردند

قضیه دهم

از نقطه ا واقعه در فضا نمیتوان بیش از یک خط بموازات ج د رسم نمود

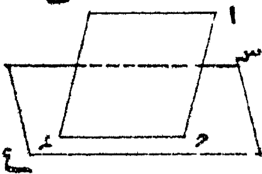
برهان - هر خط که از نقطه ا بموازات ج د رسم شود واقع گردد در سطح ا ج د بنابرین نقطه و برهان
سابق ذکر شده که در یک سطح و از نقطه مفروضه نمیتوان بیش از یک خط بموازات خط دیگر رسم نمود

قضیه یازدهم

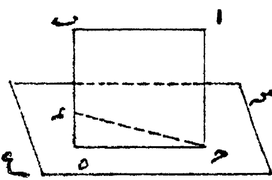
هرگاه خط اب موازی باشد با ج د واقع در سطح س ع پس موازی شود با آن سطح

برهان - اگر خط اب واقع در سطح اب ج د ملاقی گردد با س ع نقطه تلاقی البته واقع شود
بر ج د فصل مشترک ما بین اند و بفرض ما اب خط ج د را قطع نکند پس با سطح س ع ملاقی

نگردد و بنابراین موازی باشد با آنسطح

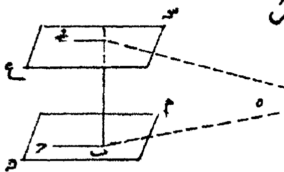


نتیجه ۱ - هرگاه خط اب موازی باشد با سطح سع و سطح اب حد مرور کند بر اب فصل مشترکش حد موازی شود با اب زیرا که چون دو خط اب و حد واقع اند در سطح اب حد اگر خط اب تلاقی میکرد حد را سطح سع را نیز تلاقی میکرد و این خلاف فرض است



نتیجه ۲ هرگاه سطح سع موازی باشد با اب و از نقطه د واقعه در آنسطح خط حد بموازات اب اخراج کنیم تمامش واقع شود در سطح سع و الا سطحی بر اب و بر نقطه د مرور میدهیم پس ده فصل مشترک مابین آن و سع موازی شود با اب و بنابراین از یک نقطه دو خط بموازات خط دیگر رسم شده

قضیه دوازدهم



دو سطح سع و م ن عمود بر خط اب متوازی باشند

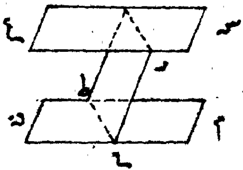
برهان - اگر تلاقی کنند نقطه ه را بر فصل مشترک آن اختیار میکنیم ه ا و ه ب را وصل میکنیم و خط اب چون عمود است بر سع عمود شود بر اه که از موقعش در آنسطح گذشته و همچنین عمود شود بر ب ه پس از نقطه ه دو عمود ه ا و ه ب بر خطی اخراج شده و این خلاف است پس دو سطح مفروض متلاقی نشوند و متوازی باشند

قضیه سیزدهم

دو سطح متوازی سع و م ن را چون سطح ثالث ط قطع کند دو فصل مشترک ه د و ط ع متوازی باشند

بوقفا اکرلیرم

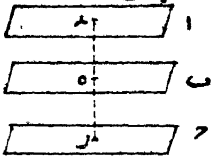
برہان۔ اگر این دو فصل مشترک متوازی نباشند و امتدادشان دہیم متلاقی گردند و آن وقت دو سطح س ع و م ن کہ شامل اند دو خط اند متلاقی شوند و این خلاف است



قضیۂ چہاردہم

خط ا ب عمود بر سطح س ع عمود باشد بر سطح م ن کہ موازیست با سطح مفروض (شکل ۱۲)

برہان خطی مثل ب د در سطح رسم میکنیم و بر ا ب و ب د سطح ا ب د را مرور میدہیم پس خط ا د فصل مشترک مابین این سطح و سطح س ع موازی شود با ب د و خط ا ب عمود بر سطح س ع عمود باشد بر خط ا د پس عمود شود بر موازیش ب د و چون ا ب عمود شد بر ہر خط مثل ب د کہ از موقعش در سطح م ن رسم شود عمود باشد بر آن سطح



قضیۂ پانزدہم

دو سطح ا و ب موازی با سطح ثالث ج متوازی باشند

برہان۔ چون خط د د را بر سطح ج عمود کنیم عمود شود بر دو سطح ا و ب و سابقہ و چون این دو سطح عمود شدند بر یک خط متوازی باشند

قضیۂ شانزدہم

دو خط متوازی ہ ط و ی ح (شکل ۱۳) واقع مابین دو سطح متوازی س ع و م ن متساوی باشند

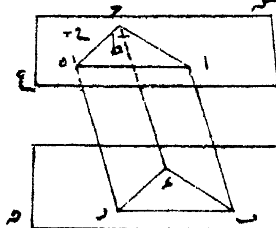
برہان چون بر دو متوازی ہ ط و ی ح سطح ہ ط ح د را مرور دہیم قطع کند دو سطح متوازی را بر دو خط ہ د و ط ح و این دو فصل مشترک متوازی باشند و ۱۳ و ہمچنین دو خط ہ ط و ی ح پس شکل ہ ط ح د متوازی الاضلاع باشد و ہ ط = ی ح

نتیجه از احکام مذکوره چنین معلوم میشود که دو سطح متوازی در همه جا یک فاصله اند زیرا که چون ه ط و ی ح را عمود کشیم بر اندو سطح متوازی میشوند و بعد متساوی

قضیه هفدهم ۱۷

هرگاه اضلاع دو زاویه ح ا ه و د ب ر غیر واقعه در یک سطح متوازی باشند و ممتد در یکجهت اند و زاویه متساوی میشوند و دو سطحشان متوازی

برهان ا د را مساوی ب د جدا کنید و ا ه = ب ر و خطوط ح ه و د ر و ا ب و ح د و ه ر را وصل کنید آنوقت چون ا د مساوی و موازی است با ب د شکل ا ب ح د متوازی الاضلاع شود



و ح د مساوی و موازی گردد با ا ب و همچنین ه ر مساوی و موازی باشد با ا ب پس ح د نیز مساوی و موازی باشد با ه ر پس شکل ح ه ر د متوازی الاضلاع باشد و بنابرین ضلع ح ه مساوی و موازی شود با د ر پس اضلاع دو مثلث ح ا ه و د ب ر متساوی باشند و بنابرین زاویه ح ا ه مساوی شود با د ب ر

و در خصوص توازی دو سطح ا ح ه و ب د ر فرض میکنیم سطحی که موازات ب د ر را میکند و تلاقی کند دو خط د ح و ر ه را نه بر دو نقطه ح و ه بلکه مثلا بر دو نقطه ط و ی در اینحالت و علی نسخه ا ب و ط د و ی ر متساوی میشوند و سابق نسخه ا ب و ح د و ه ر متساوی بودند پس چنین نتیجه شود د ح = د ط و ی ح = ر ه و این خلاف است پس سطح ا ح ه موازی باشد با ب د ر

نتیجه - هرگاه دو سطح متوازی س ع و م ن را دو سطح متقاطع ح ا ب د و ه ا ب ر قطع کنند دو زاویه ح ا ه و د ب ر حادثه ما بین فصول مشترک دو سطح متوازی متساوی

باشند

باشند زیرا که فصل مشترک اه موازیست با ب د و ۱۳ و فصل مشترک اه با به پس زاویه ح اه مساوی شود با د ب و

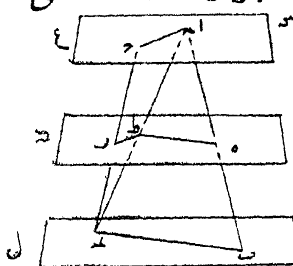
قضیهٔ هجدهم

چون سه خط اب و حد و ه د غیر واقع در یک سطح متساوی باشند و متوازی و اطراف آنها را وصل کنیم دو مثلث اده و ب د که ترکیب میشود متساوی باشند و دو سطحشان متوازی

برهان - در شکل ساب چون اب مساوی و موازیست با ح د شکل اب ح د متوازی الاضلاع باشد و ضلع اح مساوی و موازی شود با ب د و بهمین دلیل دو ضلع اه و ب د متساوی و متوازی باشند و همچنین ح ه و د د پس دو مثلث اح ه و ب د متساوی گردند و چون تساوی آنها ثابت شد بطریق شکل سابق ثابت میکنیم که نیز متوازی باشند

قضیهٔ نوزدهم

چون دو خط را سه سطح متوازی قطع کنند اجزائی از آنها و خط که واقع شده باشند ما بین آن سطوح متناسب باشند



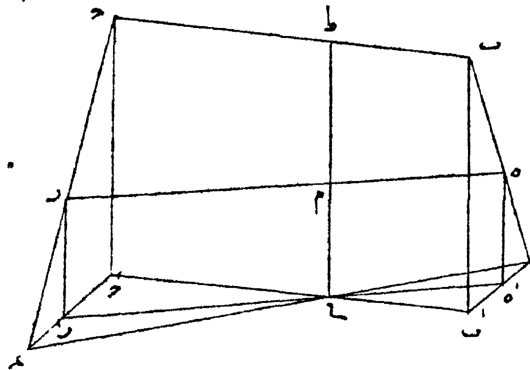
مثلاً اب را سه سطح متوازی س ع و م ن و ک ل بر نقاط ا و ه و ب قطع نموده اند و خط ح د را بهمان سطوح بر ح و د و د و گوییم این تناسب حاصل شود اه : ه ب = ح د : د د چون اد را وصل کنیم سطح م ن را بر نقطه ط قطع کند و خطوط اح و ه ط و ط د و ب د را وصل میکنیم آنوقت دو خط ه ط و ب د فصل مشترک ما بین دو سطح متوازی م ن و ک ل و سطح اب د متوازی شوند و ۱۳ پس اه : ه ب = اط

: طد وهمچنین دو فصل مشترک اد و طر متوازی باشند و این تناسب حاصل شود اط : طد
= در : زد و نظر بنسبت مشترکه اط : طد این تناسب نتیجه شود اه : هب = در : ده

قضیه بیستم

شکل اب حد ذو اربعة اضلاعی است مطلق اعم از آنکه در یک سطح بگنجد یا نه و بدو خط هر و طح اضلاع متقابله را بیان نسبت قطع نموده ایم بروجهی که اه : هب = دز : زح و نیز ب ط : طح = اح : حد پس گوئیم اند و خط قاطع هر و طح متقاطع شوند بر نقطه مثل م بر وجهیکه حم : م ط = اه : هب و هم : م ر = اح : حد

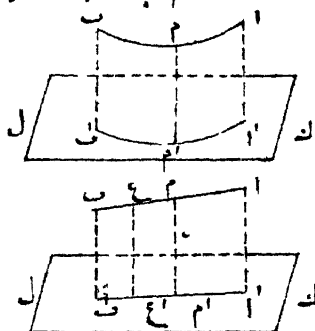
برهان چون بر اد سطح اب ح د را چنان گذرانیم که مرور کند بر طح و از نقاط ه و ب و ح و ر خطوط هه و بب و حح و رز را بموازات طح رسم کنیم و قطع نماید آنسطح را بر نقاط هَ و بَ و حَ و زَ نظر بتوازی ب بَ و طح و ححَ این تناسب حاصل شود بَح : حَح = ب ط : طح = اح : حد



پس دو مثلث احبَ و دحَحَ متشابه باشند و بعد اهَ : هَبَ = اه : هب و دزَ : زحَ = دز : زح پس اهَ : هَبَ = دزَ : زحَ یا اهَ : دزَ = ابَ : دحَ ولی نظر بتشابه دو مثلث احبَ و دحَحَ این تناسب حاصل شود ابَ : دحَ = اح : حد پس اهَ : دزَ = اح : حد

وچون دو مثلث ا ح ب و م ح ح متشابه شدند زاویه ح ا ه مساوی میشود با ح ... پس دو مثلث ا ح ه و م ح ح متشابه شوند و زاویه ا ح ه = م ح ح پس چنین نتیجه شود که خط ه ح ح مستقیم است و بنابراین سه متوازی ه ه و ط ح و د ح در سطحی واقع شود و آنسطح شامل شود دو خط ه د و ط ح را پس باید این دو خط متقاطع شوند بر نقطه م و بعد نظر بتوازی خطوط ه ه و م ح و د د این تناسب حاصل شود ه م : م د = ه ح : ح د = ا ح : ح د و چون ادله مذکوره را نسبت بخط ا ب تکرار کنیم این تناسب حاصل شود ح م : م ط = ا ه : ه ب فهو المطلوب

تعریف موقع عمودی را که از نقطه بر سطحی وارد شود تصویر آن نقطه گوئیم و تصویر خط ا م ب بر سطح ل ل عبارت است از خط ا م ب که مرور نموده باشد بر تصویرات جمیع نقاط خط مفروض



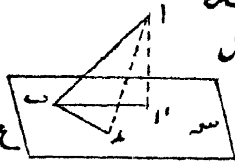
قضیه بیست یکم

تصویر خط مستقیم بر سطح خطی است مستقیم برهان چون از نقطه ا از خط ا ب عمود ا ا را بر سطح ل ل فرود آوریم و برو خط ا ب و ا ا سطحی مرور دهیم تا ل ل را بر ا ب قطع کند و از نقاط م و ح وغیره از خط ا ب عمودها بر آنسطح فرود آوریم جمیعاً موازی میشوند با ا ا و واقع میگردند در سطح ب ا ا پس ممکن نیست سطح ل ل را در خارج خط ا ب قطع کنند

قضیه بیست دوم

زاویه حاده ا ب ا حادثه ما بین خط ا ب و تصویرش ب ا بر سطح س ع اصغر است از هر زاویه مثل ا ب د که حادث گشته باشد ما بین همان خط وخطی دیگر مثل

ب د که از موقعش د را نسطح ا رسم شده باشد



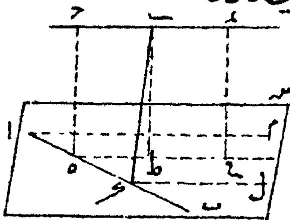
برهان - چون ب د را مساوی ب ا جدا کنیم و اد را وصل کنیم در دو مثلث اب ا و اب د ضلع اب مشترک باشد و ب ا = ب د ولی ضلع سیم اا از مثلث اول اقصر باشد از ضلع اد از مثلث دویم چونکه اا عمود است بر سطح س ع و اد مائل است پس زاویه اب ا > زاویه اب د

شرح - چون زاویه حادثه مابین خط فضا و تصویرش بر سطح اصغر است از سائر زوایا پس زاویه منفرجه تکملش اعظم باشد

نظر بحکم مذکور زاویه حادثه مابین خط و تصویرش بر سطح را زاویه خط و سطح گوئیم و نیز میل خط بر سطح

قضیهٔ بیست و سیم

در دو خط اب و حد غیر واقع در یک سطح گوئیم اولاً ممکن است عمودی مشترک بر هردو اخراج نمود ثانیاً بیش از آن یک عمود ممکن نشود ثالثاً آن عمود اقصر فاصله باشد مابین آن دو خط



برهان اولاً از نقطهٔ ا مفروضه بر اب خط ام را بموازات حد رسم میکنیم و بر اب و ام سطح س ع مرور میدهیم و آن موازی باشد با حد و از نقطهٔ مفروضه بر حد عمود حع را بر همان سطح فرود می آوریم و از ع خط ع ه را بموازات حد رسم میکنیم و از ه خط ه ح را بموازات ع د رسم میکنیم این خط ه ح عمود مشترک باشد بر دو خط مفروض زیرا که چون بموازات حع رسم شد عمود شود

بر سطح ف ومبنا براین بر اب و بر ه ج وازان پس بر ح م که موازیست با ه ج پس عمود شد بر هر دو خط

ثانیاً غیر از اینخط نشوان عمودی مشترک بر دو خط مفروض اخراج نمود زیراکه اگر ک ل را عمود دیگر فرض کنیم بر هماندو خط عمود شود نیز بر ک ل که بموازات ح د رسم شده پس عمود شود بر سطح ح ه و چون ب ط را بموازات م ج فرود آوریم ان نیز عمود شود بر همان سطح و آنوقت از یک نقطه دو عمود بر سطحی وارد شده

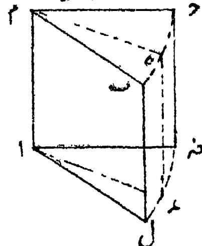
ثالثاً گوئیم ه ح اقصر فاصله باشد مابین آندو خط زیراکه چون ب ک را مابین هماندو خط وصل کنیم و ب ط را بموازات م ج فرود آوریم اینخط عمود شود بر سطح س ع و اقصر باشد از ب ک و ب ط مساویست با ه ح پس ه ح اقصر باشد از ب ک فهو المطلوب

در خواص زوایای حادثه مابین سطوح

تعریف

۱ ـ در دو سطح متقاطع مقدار میل یکی از آندو را نسبت بدیگر زاویه دو سطحی گوئیم و فصل مشترک مابین آندو سطح را خط الراس زاویه دو سطحی و هرکدام از دو سطح را ضلع از زاویه زاویه دو سطحی را با چهار حرف بنمائیم دو حرف بر خط الراس و یک حرف بر هر ضلع و در تحریر و تقریر دو حرف خط الراس را درمیان قرار دهیم

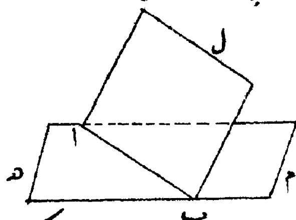
۲ ـ دو زاویه دو سطحی را متساوی گوئیم هرگاه اضلاع شان درست بر همدیگر منطبق شوند



۳ ـ چون از نقطه ا مفروضه بر خط الراس م ا دو عمود ا ن و ا ل را در دو ضلع زاویه دو سطحی ل ا م ن بر خط الراس اخراج کنیم زاویه ن ا ل حادثه مابین ان دو عمود را زاویه مسطحه نظیره یا زاویه

دو سطحی

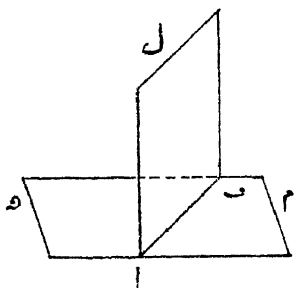
دو سطحی گوییم و جمیع زوایای مسطحه که بوجه مذکور در سایر نقاط خط ا ز از سطح حادث شوند متساوی هستند مثلا اگر بر نقطه م زاویه مسطحه ح م ب را رسم کنیم دو خط م ح و ا ن واقعه در یک سطح عمود باشند بر م ا و متوازی باشند و همچنین دو خط م ب و ا ل پس زاویه ح م ب مساوی باشد با ن ا ل



چون سطح ل ب سطح م ه را تلاقی کند دو زاویه دو سطحی مجاوره ل ا ب م و ل ا ب ه احداث شود پس اگر این دو زاویه متساوی باشند سطح ل ب را عمود گوییم بر م ه و این دو زاویه دو سطحی را قائمه و باید دانست که جمیع زوایای دو سطحی قائمه متساوی باشند چنانچه عن قریب ثابت میکنیم

قضیه بیست و چهارم ۲۴ م ۱ و

بر خط ا ب واقع در سطح م ه میتوان سطحی مرور داد که عمود شود بر م ه و بیش از یک سطح عمود ممکن نیست



نتیجه این شکل آنکه جمیع زوایای دو سطحی قائمه متساوی باشند و برهان این شکل و نتیجه اش همانست که در شکل اول از مقاله اول گذشت تکرارش لازم نیست بر متعلم است اقامه آن

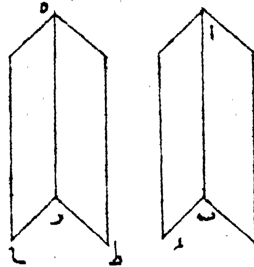
قضیه بیست و پنجم ۲۵ و پنجم و

متقاطع دو سطح دو زاویه دو سطحی مجاوره احداث شود که مجموعشان مساوی باشد با دو زاویه دو سطحی قائمه

نتیجه چون سطحی عمود شود بر سطح دیگر سطح ثانی نیز عمود باشد بر اول (رجوع کنید به ۱۳ و ۱)

قضیه بیست و ششم ۲۶ و ۱

در دو زاویه دو سطحی متساویه ح اب د و طه ی ج دو زاویهٔ مسطحهٔ نظیرشان ح ب د و ط ی ج متساوی باشند

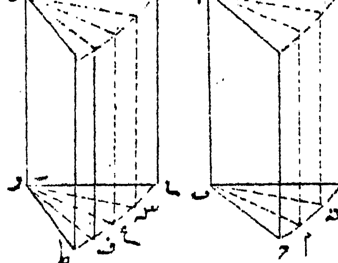


برهان. زاویه دو سطحی دویم را بر اول نقل میکنیم چنانچه د واقع شود بر اب و نقطه ی بر ب و سطح ه ر ط بر اب ح آنوقت دو زاویه ه ر ط و اب ح چون قائمه اند خط ی ط واقع شود بر استقامت ب ح و نظر بتساوی دو زاویه دو سطحی ضلع ه ی ج منطبق شود بر اب د و دو زاویه ه ی ج و اب د چون قائمه اند خط ی ج منطبق شود بر ب د

نتیجه. زاویه مسطحه نظیره زاویه دو سطحی قائمه قائمه است زیرا که چون سطحی بر سطح دیگر عمود شود دو زاویه دو سطحی مجاوره متساوی شوند پس دو زاویه مسطحه آنها نیز متساوی گردد چون این دو زاویه مجاوره اند قائمه باشند

قضیهٔ بیست و هفتم

دو زاویه دو سطحی ح اب د و طه ی ج بر نسبت دو زاویه مسطحهٔ نظیرهٔ ح ب د و ط ی ج باشند



برهان فرض میکنیم دو زاویه دو سطحی را مقیاس مشترک باشد و آن مقیاس مثلا سه مرتبه در ح اب د بگنجد و چهار مرتبه در طه ی ج پس ح اب د : طه ی ج = ۳ : ۴

حال دو سطح ح ب د و ط ی ج را عمود میکنیم بر دو خط الراس اب و ه ی و آنها قطع کنند سطوح

تقسیم را بر خطوط ب ح و ب م و غیره و بر د ط و د ف و غیره و این خطوط عمود باشند
بر ج ا و د ه پس زوایای سطحی حادثه ح ب م و م ب ن و غیره و ط د ف و ف د ع
و غیره چون نظیر اند با زوایای دو سطحی متساویه متساوی باشند و زاویهٔ ح ب ء شامل
سه جزء از این اجزا است و زاویهٔ ط د ی شامل چهار جزء پس ح ب ء : ط د ی = ۳ : ۴

و بنابراین ح ا ب ء : ط ه د ی = ح ب ء : ط د ی

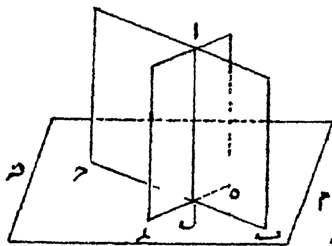
و اگر دو زاویهٔ مفروضه اصم باشند و مقیاس مشترک نداشته باشند باید مانند آنچه را که در
امثال اینجا لت ذکر شده دلیل گرفت

شرح - بعد از آنچه ذکر شد چون خواهیم زاویهٔ دو سطحی ء را تقدیر کنیم یعنی نسبتش را با زاویهٔ
دو سطحی مقیاس که مثلا قائمه باشد معلوم کنیم کافیست که نسبت زاویهٔ مسطحه نظیرش را با زاویهٔ قائمه بیاوریم

قضیهٔ بیست و هشتم

چون خط ا ل را عمود کنیم بر سطح م ن و سطحی مثل ا ل ب را بر این خط بگذرانیم این
سطح نیز عمود شود بر م ن

برهان خط ب ح فصل مشترک است ما بین دو سطح ا ب ح و م ن و اگر در سطح م ن
خط ء ه را عمود کنیم بر ح ل خط ا ل چون
عمود است بر سطح م ن عمود شود بر دو خط ح ب
و ء ه و زاویهٔ ا ل ء قائمه باشد ولی این زاویه
چون حادث شده است ما بین دو خط ا ل و ل ء
که بر فصل مشترک در دو سطح اخراج شده مقیاس زاویهٔ



واقعه ما بین دو سطح ا ب ح و م ن باشند پس این دو سطح عمود باشند بر همدیگر
شرح چون سه خط ا ل و ب ل و ء ل بر همدیگر عمود شوند هر کدامشان عمود باشد بر سطح دو

خط دیگر و سه سطح عمود باشند نسبت بهمدیگر

قضیهٔ بیست و نهم [29]

چون سطح اب عمود باشد بر سطح م د و در سطح خط ل ا را عمود کنیم بر فصل مشترک ل ب خط عمود شود بر سطح م د

برهان چون در سطح م د خط ل ء را عمود کنیم بر ل ب زاویه ا ل ء نظر بعمود بودن دو سطح قائمه باشد پس خط ا ل عمود شود بر دو خط ل ب و ل ء و بنابراین بر سطح م د

نتیجه - چون سطح اب عمود باشد بر م د و از نقطه ل مفروضه بر فصل مشترک عمودی بر سطح م د اخراج کنیم این عمود واقع شود در سطح اب والا در سطح اب عمود ا ل را بر فصل مشترک ب ل اخراج کنیم و آن بحکم قضیه مذکوره عمود شود بر م د و آنوقت از نقطه ل دو عمود بر م د اخراج شده و این خلاف است

قضیهٔ سی ام [30]

چون دو سطح اب و اء عمود باشند بر سطح ثالث م د پس فصل مشترک ایشان ا ل نیز عمود شود بر این سطح

برهان - چون از نقطه ل عمودی بر سطح م د اخراج کنیم این عمود باید یکمرتبه هم در سطح اب واقع شود و هم در سطح اء پس لابد منطبق شود بر خط فصل مشترک انها

تعریف

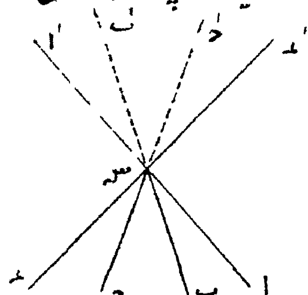
۱- شکل مرکب از تلاقی چندین سطح مرور کننده بر یک نقطه را زاویهٔ مجسمه و زاویهٔ کثیر السطوح هم گوییم

۲- فصل مشترک مابین هر دو سطح از سطوح مذکوره را خط الراس از زاویه گوئیم و نقطه تلاقی جمیع خط الراسها را راس زاویه مجسمه گوییم

و زوایای مسطحه حادثه مابین هر دو خط الراس مجاور را ضلع از زاویه مجسمه گوییم

۳- پس اگر عدد اضلاع زاویه مجسمه سه تا باشد از زاویه سه سطحی و زاویه سه ضلعی گوئیم

۴- و اینجا بحث ما در زوایای مجسمه محدبه است و آن زاویه ایست که چون هر ضلعش را ممتد نمائی تمام زاویه در یک سمتش افتد

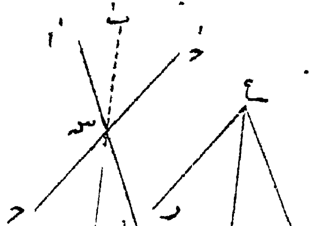


۵- شکل سه ا ب ج د زاویه مجسمه است پس اگر جمیع خط الراسها یش سه ا و سه ب وغیره را در سمت دیگر نقطه سه امتداد دهیم زاویه مجسمه حادثه سه اَ بَ جَ دَ را قرینه زاویه اول گوئیم

و ظاهر است که جمیع اضلاع و زوایای دو سطحی این زاویه مجسمه جدیده مساوی باشند با نظایر خود از زاویه اول ولی کلیة منطبق نگردد، چونکه اگر ضلع دَ سه اَ را بر مساویش ا سه د منطبق کنیم چنانچه جمیع خط الراسها دو زاویه مجسمه در یک سمت ضلع مشترک واقع شوند می بینیم که از خط سه د اضلاع و زوایای دو سطحی متناظره بعکس ترتیب اول دو زاویه مجسمه واقع گشته اند

قضیه سی و یکم

در دو زاویه سه ضلعی چون دو ضلع و زاویه دو سطحی بینها نظیر بنظیر متساوی باشند آن دو زاویه متساوی میشوند



مثلاً ا سه ب = د ع ه و ب سه ج = ه ع د
و زاویه دو سطحی سه ب = دو سطحی ع ه میگوئیم سایر اجزاء متساوی هستند

بوهانا چون ضلع د ع ه را بر ا سه ب نقل کنیم نظر بتساوی دو زاویه دو سطحی سه ب و ع ه ضلع ه ع د منطبق شود بر ب سه ج و چون زاویه ه ع د مساویست با ب سه ج خط الراس ع د واقع شود بر استقامت سه ج پس دو زاویه سه ضلعی

بر هم منطبق شوند و متساوی گردند

هرگاه اضلاع متناظره دو زاویه سه ضلعی نسبت بدو زاویه دو سطحی متناظره متساوی بعکس ترتیب واقع شده باشند زاویه سه ضلعی ع را باید نقل نمود بر زاویه سه ضلعی که قرینه سه ا ب ج باشد

قضیه سی و دوم

دو زاویه سه ضلعی هرگاه دو زاویه دو سطحی و ضلع بینهما نظیر بنظیر متساوی باشند آن دو زاویه متساوی گردند

مثلا ا سه ج = ع د و زاویه دو سطحی سه ا = ع د و دو سطحی سه ج = ع د گوییم سایر اجزای متساوی باشند

برهان چون ضلع ع د را بر مساویش ا سه ج نقل کنیم نظر بتساوی دو زاویه دو سطحی سه ا و ع د دو زاویه سه ج و ع د ضلع ع ه واقع شود بر ا سه ب و ضلع ع ه بر ج سه ب پس خط الراس ع ه منطبق شود بر سه ب و جمیع اجزا متساوی گردند

اگر زوایای دو سطحی متناظره بعکس ترتیب واقع باشند نسبت بدو ضلع متناظر درین صورت باید زاویه سه ضلعی ع را نقل نمود بر زاویه که قرینه سه باشد

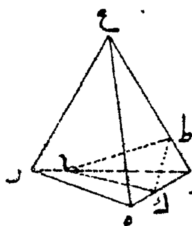
قضیه سی و سیم

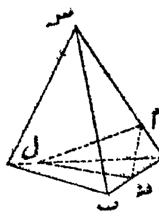
دو زاویه سه ضلعی چون اضلاع نظیر بنظیر متساوی باشند هر دو زاویه دو سطحی مقابل بدو ضلع متساوی متساوی گردند

مثلا ا سه ب = ع ه و ا سه ج = ع د و ب سه ج = ه ع د

برهان از اضلاع شش جزء سه ا و سه ب و سه ج و ع د و ع ه و ع د را متساوی جدا میکنیم و خطوط ا ب و ا ج و ب ج و د ه و د د و ه د را وصل میکنیم پس دو مثلث متساوی الساقین سه ا ب و ع د ه چون دو ضلع و زاویه بینهما شان متساوی

متساوی باشند و همچنین دو مثلث س د ب ح و ع ه د و نیز دو مثلث س ا ح و ع ط د و از تساوی این مثلثات دو مثلث ا ب ح و ط ه د متساوی الاضلاع گردند و متساوی





بعد از این مقدمه از نقطه م مفروضه بر خط الراس س ا و در دو ضلع س ا ب و س ا ح دو عمود م ه و م ل را بر آن خط اخراج میکنیم و این دو باید تلاقی کنند دو ضلع ا ب و ا ح را چونکه دو مثلث س ا ب و س ا ح متساوی الساقین میباشند و بنا براین دو زاویه قاعده س ا ب و س ا ح حاده اند و بعد خط ه ل را وصل میکنیم حال د ط را مساوی ا م جدا میکنیم در سه ضلع دویم عمل مذکور را تکرار میکنیم پس در دو مثلث قائم الزاویه ا م ه و د ط ک چون ضلع ا م = د ط و زاویه حاده م ا ه = ط د ک این دو مثلث متساوی باشند و ضلع ا ه = د ک و م ه = ط ک و همچنین ثابت میکنیم که م ل = ط ح و ا ل = د ح

و نیز دو مثلث ل ا ه و ح د ک چون دو ضلع و زاویه بینهما شان متساویست پس ضلع ه ل = ک ح و بنا براین دو مثلث ه م ل و ک ط ح سه ضلعشان نظیر بنظیر متساوی باشند پس زاویه ه م ل که مقیاس زاویه دو سطحی س ا است مساوی باشد با زاویه ک ط ح که مقیاس زاویه دو سطحی ع د است

شرح - هرگاه علاوه بر حکم قضیه دو زاویه مجسمه اضلاع متساویه متشابه الوضع باشند اندو زاویه متساوی گردند بر هم منطبق شوند و الا قرینه همدیگر باشند

قضیه سی و چهارم ۱۳۴

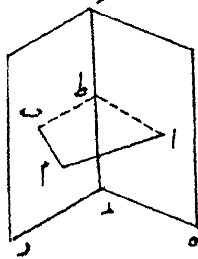
اولاً هر نقطهٔ واقعه بر سطح منصف زاویه دو سطحی بیک فاصله باشد
از دو ضلع آن زاویه و ثانیاً هر نقطه واقعه در درون آن زاویه ولی در خارج
سطح منصف آن زاویه مختلفة البعد باشد از آن دو ضلع

برهان — این حکم شبیه است بآنچه در (۱۲۱) ذکر شد و اقامه اش اینجا در عهدهٔ متعلم است

نتیجه — در هر زاویه سه سطحی سطوح منصفه زوایای دو سطحی بر یک خط مستقیم متقاطع شوند

قضیهٔ سی و پنجم

چون نقطهٔ م در درون زاویه دو سطحی فرض کنیم و از آنجا دو عمود م ا
و م ب را بر دو ضلعش فرود آوریم زاویه ا م ب حادثه مابین این دو
عمود مکمل باشد زاویه دو سطحی مفروض را



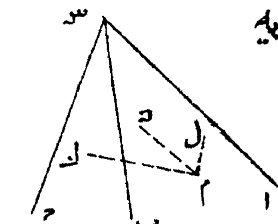
برهان — سطح ا م ب عمود است بر دو ضلع د ه د و
د ه ه و از آن پس بر فصل مشترک د ه پس دو خط
ا ط و ب ط فصل مشترک مابین این سطح و دو ضلع
زاویه مفروضه عمود باشند بر د ه و زاویه ا ط ب
مقیاس زاویه دو سطحی باشد و چون در ذو اربعة الاضلاع م ا ط ب دو زاویه ا و ب قائمه
شد پس ا م ب + ا ط ب = ۲ ق

تنبیه — اگر زاویه دو سطحی مفروضه منفرجه باشد ممکن است در بعضی حالات بحسب وضع
نقطه م موقع عمود دیگر بر یکی از دو ضلع فرود آید امتداد آن سطح را ملاقی کند و موقعش
در خارج زاویه افتد ولی دلیل مذکور باینحالت نیز تعلق گیرد بنابر آنکه ملاحظه کنیم که جمیع
زوایاییکه باختلاف موضع نقطه م حادث شوند چون اضلاعشان متوازیست
متساوی باشند پس نقطه م را بر سطح منصف آن زاویه فرض میکنیم و در اینصورت

موقع دو عمود وارده از این نقطه بر دو ضلع در داخل زاویه افتند و دلیل مذکور بآن تعلق
گیرد و حکم کلی است پس تعلق بموضع مخصوصی از آن نقطه ندارد

قضیهٔ سی و ششم

چون از نقطه م واقعه در درون زاویه سه سطحی سه عمودهای
م ل و م ك و م ن را بر اضلاع اس ب و ب س ح و اس ح فرود آوریم
از ترکیبها زاویه سه سطحی دیگر حاصل شود که اضلاعش مکمل زوایای
دو سطحی اول باشند و بالعکس اضلاع زاویه
اول مکمل زوایای دو سطحی دوم باشند



برهان بنا بر شکل سابق زاویه ل م ن حادثه از
دو خط م ل و م ن که عمودند بر دو ضلع اس ب و
اس ح مکمل زاویه دو سطحی س ا باشد و همچنین زاویه ن م ك مکمل دو سطحی س ح باشد
و زاویه ل م ك مکمل زاویه دو سطحی س ب
و در اثبات حکم ثانی اولا باید دانست که بتغییر موضع م در زاویه مجسمه س مقدار زاویه مجسمه
م ل ن ك تغییر نکند چونکه اضلاع جمیع زوایای سه سطحی که بتغییر مکان آن نقطه حادث شوند
متساوی باشند و متشابه الوضع
بعد از این مقدمه چون سطح ل م ن عمود است بر دو ضلع اس ب و اس ح عمود شود
بر فصل مشترکشان س ا پس بعکس این خط عمود شود بر این سطح و همچنین س ب عمود باشد
بر سطح ل م ك و س ح بر سطح ن م ك و بالجمله اگر نقطه م را بر خط منصفه زوایای
دو سطحی س ا و س ب و س ح فرض نمائیم مواقع اعمده م ل و م ن و م ك واقع
میشوند در درون زوایای اس ب و اس ح و ب س ح پس نقطه س در درون

زاویه

زاویهٔ سه سطحی م ل ن ك میباشد و چون خطوط س ا و س ب و س ح عمود شده اند
بر اضلاع ل م ن و ل م ك و ن م ك پس بنا بر جزو اول قضیهٔ زوایای ا س ب
ب س ح و ا س ح مکمل باشند زوایای دو سطحی م ل و م ك و م ن را

قضیهٔ سی و هفتم

هرگاه دو زاویهٔ سه سطحی زوایای دو سطحی متساوی باشند
اضلاعشان نیز متساوی گردند

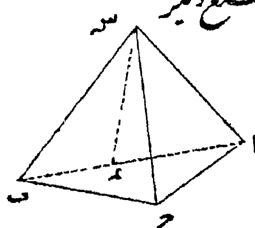
برهان فرض میکنیم س و س' دو زاویهٔ سه سطحی مذکور باشد و ع و ع' دو زاویهٔ سه سطحی
مکملشان و چون زوایای دو سطحی س و س' بفرض متساوی هستند بحکم شکل سابق
اضلاع دو زاویهٔ سه سطحی ع و ع' متساوی گردند و ازان پس بنا بر ق ۳۳ زوایای دو
سطحیشان متساوی شوند و چون این زوایای دو سطحی دو زاویهٔ سه سطحی ع و ع' متساوی
گشتند اضلاع دو زاویهٔ سه سطحی س و س' متساوی شوند

شرح هرگاه اضلاع متساویه دو زاویهٔ سه سطحی متشابهة الوضع نیز باشند آن دو زاویه
متساوی گردند و بر همدیگر منطبق شوند و الا قرینه هم باشند

قضیهٔ سی و هشتم

در زاویهٔ مجسمهٔ سه ضلعی مجموع هر دو ضلعش اعظم باشد از ضلع سیم

این حکم وقتی برهان خواهد که ضلع سیم اعظم باشد از هر کدام از دو ضلع دیگر



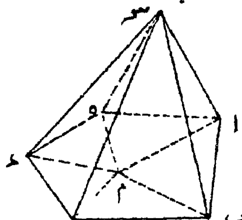
مثلا زاویهٔ مجسمه س مرکب است از سه ضلع ا س ب
و ا س ح و ب س ح و ضلع ا س ب اعظم است از هر
کدامشان میگوئیم ا س ب < ا س ح + ح س ب

برهان در سطح ا س ب زاویهٔ ب س د را مساوی ب س ح

جدا میکنیم و خط ا د ب را وصل میکنیم و س ج را مساوی س د جدا میکنیم و دو خط ا د و ب ج
را وصل میکنیم در دو مثلث ب س د و ب س ج ضلع ب س مشترک است و س د
= س ج و زاویه ب س د = ب س ج پس این دو مثلث متساوی باشند و ب د مساوی
شود با ب ج و در مثلث ا ب ج ضلع ا ب < ا ج + ب ج چون ب د را از طرفی
وضع کنیم و ب ج را از طرفی باقی میماند ا د < ا ج حال در دو مثلث ا س د و ا س ج ضلع
ا س مشترک است و س د = س ج و ضلع دیگر ا د < ا ج پس زاویه ا س د کوچکتر باشد از
ا س ج و چون بر طرفین دو زاویه متساویه ب س د و ب س ج را اضافه کنیم چنین نتیجه شود
ا س د + ب س د یا ا س ب < ا س ج + ب س ج

قضیهٔ سی و نهم ۳۹

مجموع اضلاع هر زاویهٔ مجسمهٔ محدبه اصغر است از چهار قائمه



برهان بر زاویهٔ مجسمه س سطح ا ب ج د ه را چنان
میگذرانیم که جمیع خط الرأسها را قطع کند و از نقطهٔ مثل
م مفروضه در این سطح خطوط م ا و م ب و م ج و م د
و م ه را بجمیع زوایا وصل میکنیم
پس مجموع زوایای مثلثات ا س ب و ب س ج وغیره که حول نقطه س دور زده اند
مساویست با مجموع زوایای مثلثات ا م ب و ب م ج وغیره که حول نقطه م دور زده اند
و عددشان برابر مثلثات اول است و در نقطه ب مجموع دو زاویه ا ب م و م ب ج یعنی زاویه
ا ب ج اصغر است از مجموع دو زاویه ا ب س و س ب ج و همچنین در نقطه ج مجموع دو زاویه ب ج
م + م ج د اصغر است از ب ج س + س ج د و هکذا در سایر زوایای کثیر الاضلاع
ا ب ج د ه و بنا بر این مجموع زوایای قواعد مثلثاتی که حول نقطه م دور زده اند اصغر است

از مجموع

از مجموع زوایای قواعد مثلثی که روشان بهم واقع است پس مقابله مجموع زوایای حول نقطه م اعظم است از مجموع زوایای حول نقطه سه و مجموع اول چهار قائمه است پس مجموع اضلاع زاویه مجسمه سه کمتر باشد از چهار زاویه قائمه

قضیهٔ چهلم (۴۰)

در هر زاویه سه سطحی اولاً مجموع زوایای دو سطحیش بین دو قائمه و شش قائمه و ثانیاً چون بر کوچکترشان دو قائمه بیفزائیم بزرگتر باشد از مجموع دو زاویه دیگر

برهان - اولاً فرض کنیم ح و د و ه زوایای دوسطحی باشند از یک زاویه سه سطحی و ط و د و ه اضلاع زاویه سه سطحی مکملش باشند

پس ح = ۲ق − ط و د = ۲ق − د و ه = ۲ق − ه

و چون این سه تساوی را باهم جمع کنیم چنین شود ح + د + ه = ۶ق − (ط + د + ه)

و مجموع ط + د + ه اعظم است از صفر و اصغر است از چهار قائمه پس مجموع ح + د + ه کوچکتر باشد از ۶ قائمه و بزرگتر از ۲ قائمه

ثانیاً - چون ح و د و ه زوایای دوسطحی فرض شده اند از زاویه سه سطحی و ح کوچکتر باشد از میانه آنوقت ۲ق − ح و ۲ق − د و ۲ق − ه اضلاع زاویه سه سطحی مکمل شوند و ۲ق − ح اعظم باشد از میانه پس (ق ۳۸)

۲ق − ح < ۲ق − د + ۲ق − ه

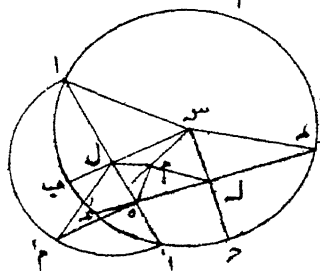
و چون بطرفین ه + د + ح را اضافه کنیم و ۲ق موضوع نمائیم چنین شود

د + ه < ۲ق + ح

قضیهٔ چهل و یکم (۴۱)

شرط واجب و کافی در امکان ترکیب زاویهٔ مجسمهٔ سه سطحی از سه ضلع مفروضی آنستکه مجموع سه ضلع کوچکتر باشد از چهار زاویهٔ قائمه و بزرگتر آنها کوچکتر باشد از مجموع دو زاویهٔ دیگر

برهان وجوب دو شرط مذکور را سابق مبرهن نمودیم و اکنون باید در کفایت آنها بحث کنیم



فرض میکنیم ب سه ج و ا سه ب و د سه ج سه ضلع مفروض باشد که در سطحی گسترانیده ایم و بزرگترشان ب سه ج را در وسط پس از مرکز سه و بشعاع سه ا دایره رسم میکنیم و از دو نقطهٔ ا و د دو عمود ا اَ و د دَ را بر سه ب و سه ج فرود میاوریم و چون زاویه ب سه ج اعظم فرض شده قوس ب ج بزرگتر باشد از هر کدام از دو قوس ب ا و ج د و چون ب اَ = ب ا نقطهٔ اَ باید فیما بین ب و ج واقع شود و همچنین نقطهٔ دَ و بفرض ب سه ج < ا سه ب + ج سه د پس ب ج < ا ب + ج د و چون ب اَ = ب ا و ج دَ = ج د پس نقطهٔ اَ واقع شود در بین دَ از قوس ب ج و بالجمله چون مجموع سه ضلع را از ۴ قائمه کوچکتر فرض نموده ایم نقطهٔ د باید بر محیط ابتدا از ب و در جهت رسم در بین ا واقع شود و بنابراین دو وتر ا اَ و د دَ در درون دایره متلاقی گردند

بعد از این مقدمه از نقطهٔ ه عمود ه م را بر سطح ب سه ج اخراج میکنیم و در سطح ل ه م از مرکز ل و بشعاع ل ا دایره رسم میکنیم تا ه م را بر نقطهٔ م قطع کند و م سه را وصل میکنیم و میگوئیم سه ب م ج زاویهٔ سه سطحی مطلوبه است

برهان - چون م ل و م ک را وصل کنیم دو مثلث سه ل و م ل سه قائم الزاویه اند

برل و سرل در هردو مشترک است و ال = لم پس متساوی باشند و زاویه الرل
= لسم و همچنین دو مثلث قائم الزاویه م سرک و مسرک نظر باشتراک ضلع
سرک و تساوی دو ضلع سم و سرم متساوی باشند پس م سرک = مسرک

تنبیه بعد از انچه ذکر شد ظاهر است که چون بر قطر اا و بمرکز ل نصف دایره
ام ا را رسم کنیم و از نقطه ه عمود ه م را بر قطر اخراج کنیم تا بمحیط منتهی شود
و ل م را وصل کنیم زاویه مسطحه ه ل م مقیاس زاویه دوسطحی ح سه ح م آید
و بمانند این عمل میتوان مقیاس هر زاویه دیگر را بدست آورد

شرح چون خواهیم از سه زاویه دوسطحی ح و د و ه زاویه سه سطحی ترکیب کنیم شرط
واجب و کافی همین است که مجموع آنها واقع باشد ما بین ۲ قائمه و ۶ قائمه و کوچکتر
شان باضافه ۲ قائمه اعظم باشد از مجموع دو زاویه دیگر

وجوب این شرط مبرهن شده و حال گوئیم کافی باشند زیرا که در صورت
حفظ این دو شرط میتوان با سه ضلع ۲ق - ح و ۲ق - د و ۲ق - ه زاویه سه سطحی تکمله آنرا
ترکیب کرد و بعد از ترکیب آن معلوم است که تکمله اش زاویه سه سطحی است مرکب از
سه زاویه دوسطحی ح و د و ه

مقاله ششم

در خواص اجسام کثیرة السطوح

تعریف

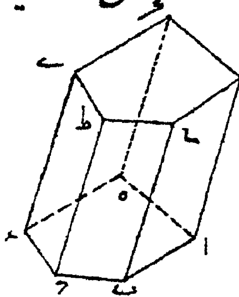
اول جسم کثیر السطوح آنست که از اطراف محدود باشد بسطوح مستویه وابسته معلومست که آن سطوح منتهی میشوند بخطوط مستقیمه و ما این اجسام را مثیر کثیر السطوح گوئیم و بتفصیل چهار سطحی جسمی است محدود بچهار سطح مستوی و شش سطحی صاحب شش قاعده است و هشت سطحی صاحب هشت قاعده و هکذا دوازده سطحی و بیست سطحی وغیره

از جمله اجسام کثیر السطوح چهار سطحی از همه ساده تر و مختصر تر است زیرا که در تر کیب زاویه مجسمه اقلاً سه سطح لازمست و چون زاویه ترکیب شد فضائی غیر محدود دارد که اقلاً باید سطحی دیگر محدود و محصورش نمود

۲ ـ فصل مشترک مابین هر دو سطح مجاور را اضلاع کثیر السطوح یا خط الراس گوئیم

۳ ـ کثیر السطوح منتظم آنست که جمیع اضلاعش کثیر الاضلاع منتظم باشد و جمیع زوایای مجسمه اش متساوی و عدد این نوع پنج است (رجوع کنید بضمیمه مقاله ششم و هفتم)

۴ ـ منشور جسمی است محصور مابین چندین سطح متوازی الاضلاع که از طرفین منتهی باشند بدو سطح کثیر الاضلاع متساوی و متوازی



در ترکیب چنین جسم کثیر الاضلاع ا ب ج د ه را بر سطحی رسم میکنیم و در سطحی دیگر موازی آن خطوط ی ح و ح ط و ط ی وغیره را مساوی و موازی اضلاع ا ب و ب ج و ج د وغیره طرح میکنیم تا کثیر الاضلاع

ی ح ط ـ ك ترکیب شود مساوی اب ح د ه حال چون مابین دو سطح روش زوایای مناظره را بخطوط ا د و ب ح و ح ط وغیره وصل کنیم سطوح ا ب ح د و ب ه د ط ح وغیره متوازی الاضلاع میشوند و چنین جسم مرکب اب ح د ه ی ح ط ـ ك منشور مطلوب است

۵ ـ دو کثیر الاضلاع متساوی و متوازی اب ح د ه و ی ح ط ـ ك را دو قاعده منشور گوئیم و ترکیب سایر سطوح متوازیة الاضلاع را سطح طرف و سطح محدب منشور گوئیم و خطوط مستقیم ا د و ب ح و ح ط وغیره را اضلاع منشور

۶ ـ ارتفاع منشور فاصله مابین دو قاعده او است و بعبارت اخری طول عمود است که از یک نقطه قاعده علیا بر سطح قاعده سفلایش فرود آید

۷ ـ منشور قائم آنست که اضلاعش ا د و ب ح وغیره عمود باشند بر دو سطح قاعده و در اینصورت هر که امشان ارتفاع منشور شود و در غیر اینصورت منشور را مائل گوئیم و ارتفاعش اقصر باشد از طول ضلع

۸ ـ منشور را بحسب اختلاف شکل قاعده اش که مثلث باشد یا ذوار بعه اضلاع یا ذو خمسه اضلاع یا ذو ستة اضلاع وغیره مثلث القاعده گوئیم و مربع القاعده و مخمس القاعده و مسدس القاعده وغیره

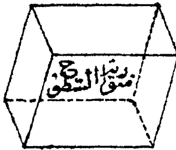
۹ ـ منشوریکه قاعده اش متوازی الاضلاع باشد جمیع سطوحش متوازی الاضلاع میشود در اینصورت آنرا متوازیة السطوح گوئیم

جسم متوازیة السطوح هرگاه خطوط الراسهایش عمود باشند بر قاعده آنرا متوازیة السطوح قائم گوئیم و اگر علاوه بر آن قاعده اش معین باشد یعنی مربع مستطیل آنرا متوازیة السطوح قائم الزاویه گوئیم یا مکعب مستطیل

۱۰ ـ از جمله مکعبات مستطیله مکعب است که شش سطحی منتظم نیز گوئیمش و آن جسمی است

محدود بشش مربع متساوی

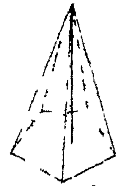
۱۱- جسمی را که ترکیب شود از وصل نقطهٔ فضائیه سه بجمیع رؤس کثیر الاضلاع مسطح ا ب ح د ه مخروط مضلع و هرم گوئیم س ۳۹ ه



کثیر الاضلاع ا ب ح د ه را قاعدهٔ هرم گوئیم و نقطه سه را راس و مجموع مثلثات ا س ب و ب س ح وغیره را سطح محدب و سطح طرف هرم

۱۲- ارتفاع هرم عمودیست که از راس فرود اید بر سطح قاعده اش

۱۳- هرم را بحسب انکه قاعدهٔ او مثلث باشد یا ذوار بعة اضلاع وغیره مثلث القاعده گوئیم و مربع القاعده وغیره



۱۴- هرم را منتظم گوئیم هرگاه قاعده اش کثیر الاضلاع منتظم باشد و عمودی که از راس منتهی شود بمرکز ان قاعده و در اینصورت عمود مذکور را سهم و محور هرم گوئیم

۱۵- قطر هرم خطی است واصل مابین دو راس از او یه مجسمه غیر مجاوره

۱۶- سطح محدب سطحی است منحنی یا مرکب از اجزای مستویه بوجهیکه چون از هر نقطه اش سطحی مستوی مرور دهیم ان سطح بر یکطرفش افتد

اجسام کثیرة السطوح که تا منظور داریم همه چنانند که چون هر کدام از سطوح شان را امتداد دهیم تمام جسم بیکطرفش افتد پس سطح چنین کثیرة الاضلاع محدب است

قضیهٔ اوّل

دو کثیر السطوح محدب هرگاه در دو رؤس مشارک باشند البته بر هم منطبق گردند

زیرا یکی از این دو جسم را فرض میکنیم ساخته حاضر باشد پس اگر خواهیم کثیر السطوح دیگر ترتیب کنیم که با آن در رؤس مشارک باشد بی کم و زیاد و لی متحد نگردد باید سطوحش مرور کنند جمیعاً بر

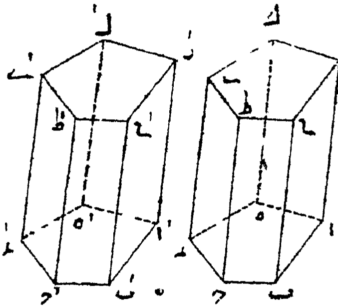
تنبیه

نام هرم از بابت مشابهه شکلی این جسم است با اهرام مصر

همان نقاطیکه در جسم اول سطوح گذشته‌اند والا اختلاف مابین این دو جسم پدید نشود متحد گردند ولی ظاهر است که بنابراین شرط بعضی از سطوح جدیده کثیر السطوح اول را قطع کنند و آن وقت روس چند در یکطرف این سطوح افتد و روس چند در طرف دیگر و این وضع در کثیر السطوح محدب پسندیده نیست پس اگر دو کثیر السطوح در روس مشارک باشند بی کم و زیاد البته برهم منطبق گردند

قضیهٔ دوم

دو منشور متساوی باشند هرگاه سه سطح محیط بر زاویه مجسمه یکی نظیر بنظیر مساوی باشند با سه سطح محیط بر زاویه مجسمه دیگر و مقصود از تناظر آنستکه متشابه الوضع باشند



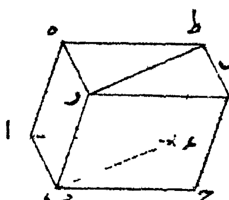
مثلاً قاعده ا ب ج د ه مساویست با ا′ب′ج′د′ه′ و متوازی الاضلاع ا ب ح ز مساویست با ا′ب′ح′ز′ و متوازی الاضلاع ب ج ط ح مساویست با ب′ج′ط′ح′ میگوییم منشور اب ج مساویست با منشور ا′ب′ج′

برهان ـ چون قاعده ا ب ج د ه را بر مساویش ا′ب′ج′د′ه′ نقل کنیم درست منطبق شود و بنابر فرض سه زاویه سطحیه که مجسمه ب را ترکیب میکنند نظیر بنظیر مساوی باشند با سه زاویه سطحیه که زاویه مجسمه ب′ را ترکیب میکنند باین ترتیب اب ج = ا′ب′ج′ و اب ح = ا′ب′ح′ و ح ب ج = ح′ب′ج′ پس این دو زاویه مجسمه متساوی باشند و بنابراین ضلع ب ح واقع شود بر مساویش ب′ح′ و نیز نظر بتساوی دو متوازی الاضلاع اب ح ز و ا′ب′ح′ز′ ضلع ح ز واقع و منطبق شود بر مساویش ح′ز′ و همچنین ح ط بر ح′ط′ پس قاعده علیای ح ط ل ... تماماً

واقع شود بر مساوی خود د ی ط ل و دو جسم زوشان مشترک میشود و بنابراین حکم
جسم واحد پیدا میکنند ف ا

نتیجه - دو منشور قائمیکه قاعده و ارتفاعشان مساوی باشند متساوی هستند
زیرا که چون ضلع اب مساوی باشد با اَبَ و ارتفاع ب ج با بَ جَ مستطیل اب ج د
مساوی شود با مستطیل اَبَ جَ دَ و همچنین است حکم در دو مستطیل ب ج ط ح و بَ جَ طَ حَ
و بنابراین سه سطح محیط بر زاویه مجسمه ب مساوی شد با نظایر خود از زاویه مجسمه بَ پس دو منشور
متساوی میشوند

قضیه سیم



در جسم متوازی السطوح اضلاع متقابله متساوی و متوازی باشند
برهان - بنابر تعریف (۹) دو قاعده اب ج د و ه ی ح ط دو
متوازی الاضلاع عند متساوی و اضلاعشان متوازی پس برهان را
باید در هر دو سطح متقابل طرف قائمه نمود مثل اه ط د و ب ی ح ج پس شکل اب ج د چون متوازی
الاضلاع است اد مساوی و موازی باشد با ب ج و بهمین دلیل اه مساوی و موازی باشد
با ب ی و پس زاویه داه مساویست با ج ب ی و داه و سطح داه موازی با ج ب ی پس
متوازی الاضلاع د اه ط مساوی شد با ج ب ی ح و بهمین جهة ثابت میشود که دو متوازی
الاضلاع متقابل اب ی ه و د ج ح ط متساوی و متوازی باشند

نتیجه - چون متوازی السطوح جسمی شد محدود بشش سطحی که هر دو تای متقابل با هم متساوی
و متوازی هستند میتوان هر سطحش را با مقابل آن دو قاعده این جسم گرفت

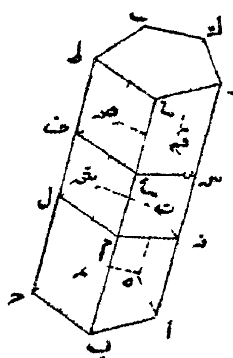
شرح - چون سه خط معلوم اب و اه و اد بر نقطه ا متقاطع گشته سه زوایای سطحیه معینه ما بین
انها احداث شده باشد میتوان بر آنها متوازیه السطوح مشخص طرح نمود بانوجه که هر طرف گرام

از این خطوط سطحی مرور دهیم موازات سطح ح و خطوط دیگر مثلا بر نقطه ب سطحی بموازات ه ا و بر نقطه
ه سطحی بموازات ب ا ه و بر نقطه ه سطحی بموازات ب ا ه این سه سطح متلاقی شوند و باشند
سطح متوهم از سه خط مفروض شکل مطلوب ترکیب شود

قضیهٔ چهارم

در جسم متوازیة السطوح اقطار بر یک نقطه متقاطع شوند و منصف همدیگر باشند

برهان در شکل سابق دو قطر ه ح و ا ط را مابین هر دو راس متقابل وصل میکنیم پس چون
ا ه مساوی و موازیست با ح ط شکل ا ه ح ط متوازی الاضلاع باشد و دو قطر ه ح و ا ط
همدیگر را نصف کنند و بهمین وجه ثابت میشود که قطر ه ح و قطر دیگر مثلا د ی نیز همدیگر را نصف کنند
پس چهار قطر در نقطه متقاطع شوند و آنجا همدیگر را نصف کنند و آن نقطه را میتوان مرکز متوازی
السطوح خواند



قضیهٔ پنجم

هر منشور مثل ا ب ح را چون دو سطح متوازی
قطع کنند دو مقطع حادث ن م ل ث ت و س ع
ص ق ف دو کثیر الاضلاع متوازی باشند

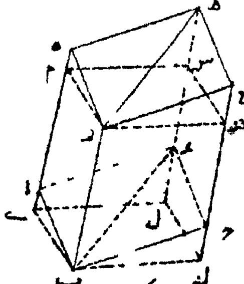
برهان - دو ضلع ن م و س ع چون دو فصل مشترک مابین
دو سطح متوازیند و سطح ثالث ا ب ح د متوازی باشند
و چون واقع باشند مابین دو ضلع متوازی ن س و م ع منشوریس متساوی باشند
و بهمین دلیل اضلاع م ل و ل ث و غیره از مقطع ن م ل ث ت بترتیب مساوی باشند با
اضلاع ع ف و ف ص و غیره از مقطع س ع ف ص ق و چون اضلاع متساویه مذکوره متوازی
هستند پس زوایای ن م ل و م ل ث و غیره از مقطع اول بترتیب مساوی باشند با زوایا

سع ف وغیره از مقطع دوم پس دو مقطع دو کثیر الاضلاع متساوی هستند

نتیجه هرگاه سطح قاطع موازات قاعده باشد مقطعش مساوی شود با این قاعده

قضیهٔ ششم

در متوازیة السطوح اب سطحی که مرور کند بر دو خط الراس متقابل ب و ط تقسیم نماید بجسم او بدو منشور مثلث القاعده متعادل



برهان - بر دو راس ب و د دو سطح ب ل لد و م سه د را مرور دهید عمود بر ضلع ب و س خط الراس اه و ط و ح ح را سطح اول قطع کند بر نقاط ل و ل و سطح دوم بر نقاط م و سه و ده و دو مقطع ب ل لد و م سه د دو متوازی الاضلاع متساوی کردند تساویشان نظر باینست که حادث شده اند از مرور دو سطح عمود بر یک خط مستقیم و بنا براین از دو سطح متوازی ف ه و متوازی الاضلاع بودنشان نظر باینست که هر دو ضلع متقابل مقطعی مثل سه ف و ل لد فصل مشترک اند مابین دو سطح متوازی اب ده و ح ط و سطح ثالثی

و بمانند دلیل مذکور شکل ب سه م د متوازی الاضلاع باشد و همچنین سایر سطوح ب ل د ل و لد ل سه ده و ب ل سه م از اطراف جسم ب ل لد م سه ده پس این جسم منشور است (تعریف ۲) و منشورش قائم چونکه ضلع ب ع عمود است بر سطح قاعده

بعد از این مقدمه چون منشور قائم ب سه را بسطح ب و ط د قسمت کنیم بدو منشور مثلث القاعده قائم ب ل م و سه و ب ل لد و سه ده گوئیم که منشور مثلث القاعده مائل اب ده و ط معادل باشد با منشور مثلث القاعده قائم ب ل م و سه

برهان - چون این دو منشور مشترکند در جزء اب د سه م د بعد از وضع این جزء باقی میماند دو جسم ب ـ ا د ل و د م ه ط سه و باید ثابت کنیم متساویند

در دو متوازی الاضلاع اب د ه و ـ ب د م دو ضلع ا ه و ـ م چون مساوی هستند با موازی خود ب د پس متساوی باشند و بعد از وضع مشترک ا م باقی میماند ا ـ = م ه و بهمین وجه ثابت میشود که د ل = ط سه

حال بتبدیل انطباق جسم د م ه ط سه را نقل میکنیم بر ب ـ ا د ل و اول قاعده د م سه را قرار میدهیم بر مساوی خود ب ـ ل و آنوقت نقطه م واقع شود بر ـ و نقطه سه بر ل و دو ضلع م ه و سه ط بر مساوی خود ـ ا و ل د چونکه همه عمودند بر سطح ب ـ ل پس این دو جسم برهمدیگر منطبق شوند و بنابراین منشور مائل ب ا د ه ط معادل باشد با منشور قائم ب ـ ل د م سه و بهمین وجه ثابت شود که منشور مائل ب د ح د ط ی معادل باشد با منشور قائم ب ل ک د سه نه و دو منشور قائم ب ـ ل د م سه و ب ل ک د سه نه متساوی باشند چونکه هر دو برابر ارتفاع واحد اند و دو قاعده آنها ب ـ ل و ب ل ک هر کدام نصف متوازی الاضلاع است پس دو منشور مثلث القاعده ب ا د ه ط و ب د ح د ط ی معادل شدند با دو منشور متساوی و بنابراین متعادل اند

نتیجه - هر منشور مثلث القاعده مثل اب د ه د ط نصف متوازیة السطوح اح است که همان زاویه مجسمه ا و همان خط الراسهای اب و ا د و ا ه باشد

قضیهٔ هفتم

هرگاه دو متوازیة السطوح اح و ال مشترک باشند در قاعدهٔ اب ح د و دو قاعدهٔ علیاشان ه ی ط و ـ ک ل م در یک سطح باشند و ما بین دو خط متوازی ه ک و ط ل پس متعادل شوند

این شکل سه حالت دارد بحسب آنکه ه ـ بزرگتر باشد از ه د یا کوچکتر یا مساوی آن و یکن

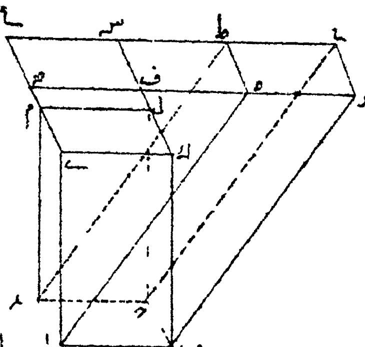
دلیل در همه یکیست و اول گوئیم که منشور مثلث القاعده ا ه ب ط م مساوی است با منشور مثلث القاعده ب ر لـ ح ح ل ن بوهها چون ا ه موازیست با ب ر و ط ه با ح د زاویه ا ه ب = ب ر لـ و زاویه ط ه ب = ح ر لـ و زاویه ط ه ا = ح د ب از این شش زاویه سه تای اول ترکیب میکنند زاویه مجسمه ه را و سه تای دوم زاویه مجسمه د را و چون از زوایای سطحیه نظیر به نظیر متساویند دو زاویه مجسمه مذکوره متساوی گردند حال چون منشور ا ه م را بر منشور ب د ل نقل کنیم و اول قاعده ا ه ب را قرار دهیم بر ب د لـ این دو قاعده چون متساوی هستند بر هم منطبق شوند و چون دو زاویه مجسمه ه و د متساوی گشته بودند ضلع ه ط منطبق شود بر مساویش د ح و در وقوع انطباق و منشور بیش از این شرط لازم نیست چونکه بقاعده ا ه ب و خط الراس ه ط منشور ا ه م صورت بندد همچنانچه بقاعده ب د لـ و خط الراس د ح منشور ب د ل پس این دو منشور متساوی گردند

حال چون از تمام جسم ا ل مرتبه موضوع کنیم منشور ا ه م را و مرتبه منشور ب د ل را باقی میماند دو منشور متوازی السطوح ا ب ل و ا ب ح پس این دو متساوی باشند

قضیه هشتم

هر دو متوازیة السطوح که بر قاعده واحده و بر ارتفاع واحد باشند متعادل گردند

قاعده ا ب ح د مشترکست در دو متوازیة السطوح ا ح و ا ل و چون بیک ارتفاعند دو قاعده علیاشان ه و ح ط و لـ ل م در یکسطح واقع شوند علاوه بر آن دو ضلع ه د و ا ب متساوی و متوازی میباشند و همچنین لـ لـ و ا ب پس ه د مساوی و موازی شود با لـ لـ و بمانند این دلیل ح د مساوی و موازی شود با ل لـ و حال دو ضلع ه د و ط ح را

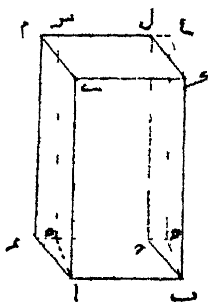


از طرفی امتداد میدهیم و دو ضلع ك ل
و ي م را از طرفی دیگر تا متقاطع گردند
و بر نقاط فصول مشترکه صورت دهند
متوازی الاضلاع د ف س ع را و ظاهر
است که این شکل مساوی باشد با هر کدام از
دو قاعده ه ي ج ط و ك ل م و
چون متوازیه السطوح ثالثی تصور کنیم بر قاعده سفلای اب حد و علیای د ف س ع معادل
شود با متوازیه السطوح اح چونکه بر قاعده سفلای واحد اند و قاعده علیا شان در یک سطح اند
و ما بین دو خط متوازی ح ع و ر د و بهمین دلیل همان متوازیه السطوح معادل شود با ال پس
دو متوازیه السطوح اح و ال که بر قاعده و ارتفاع واحد میباشند متعادل باشند

قضیه نهم ٩

هر متوازی السطوح را میتوان مبدل نمود بمکعب مستطیل معادلیکه با ارتفاع
آن باشد و قاعده اش معادل باشد با قاعده آن

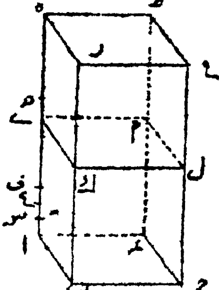
در شکل سابق اح متوازیه السطوح مفروض است و از نقاط ا و ب و ح و د خطوط
اي و ب ك و ح ل و د م را عمود میکنیم بر سطح قاعده و منتهی مینمائیم بسطح قاعده علیا
تا متوازیه السطوح ال ترکیب شود و آن معادل است با اح و سطوح اطرافش اك و ب ل و غیره
مربعات مستطیل اند پس اگر قاعده اب حد نیز مربع مستطیل باشد ال مکعب مستطیلی باشد
معادل متوازیه السطوح مفروض اح و اگر اب حد مربع مستطیل نباشد اه و ب ن
را عمود میکنیم بر حد و بعد ه س و ن ع را بر سطح قاعده تا مکعب مستطیل اب ن ه ك
ع س مرکب شود



برهان بعلت قاعده اب ده ومقابلش ل ع س مربع مستطیل اند وسطوح اطراف نیز همچنانست زیراکه خطوط الزاویه اب وه سه وغیره عمود اند بر سطح قاعده پس اع مکعب مستطیل و ما هیتوانیم دو متوازیة السطوح اع و ال را مشترک فرض کنیم در قاعده اب لب و در ارتفاع اه پس این دو متعادل باشند پس متوازیة السطوح اع (شکل سابق) که اول تبدیل شده بوده بجسم معادل ال نوبت دیگر تبدیل شد بمکعب مستطیل معادل اع که با رتفاع اه است وقاعده اش اب ده معادلست با قاعده اب حد

قضیۀ دهم

دو مکعب مستطیل اع و ال که بر قاعده واحده اب حد باشند نسبتشان مثل دو ارتفاع اه و اب است



برهان فرض میکنیم دو ارتفاع اه و اب بر نسبت دو عدد صحیح ۱۳ و ۷ باشند و اه را بر ۱۳ جزو متساوی قسمت کنیم و اب شامل ۷ جزء آنها شود و بر نقاط قسمت س و ع و ف سطوح مستویه موازات قاعده میکشانیم این سطوح جسم اع را بر ۱۳ مکعب مستطیل جزء قسمت کننده و اینها متساوی باشند چونکه بر قواعد وارتفاعات متساویه اند تساوی قواعد نظر بانست که هر مقطع مثل م ل که در منشور بموازات قاعده اش اب حد احداث شود مساویست با این قاعده و ش و تساوی ارتفاعات بسبب انستکه جمیعا همان قسمتهای اس و سع و ع ف میباشند و چون از این ۱۳ مکعب مستطیل متساوی هفت تا در ال محتویست پس نسبت جسم اع بحجم ال مثل ۱۳ باشد به ۷ یا مثل ارتفاع اه باشد

بارتفاع ا

واگر دو ارتفاع اه و اب اصم باشند باید بطریق ق ۸ او ۲ ثابت نمود که این نسبت مطلقاً محقق است بقیّه در مکعب مستطیلی که ج و د و ه سه خط الراس مجاورش باشند و یکی از آنها را ارتفاع بگیریم دو تای دیگر دو بعد قاعده اش باشند

قضیّهٔ یازدهم

هرگاه دو مکعب مستطیل م و مَ در یک بعد مشارک باشند نسبتشان بهمدیگر مثل مسطح دو بعد دیگرشان باشند و بعبارت اخری دو مکعب مستطیلی که بر ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل دو قاعده است

برهان. سه بعد مکعب مستطیل م را ج و د و ه فرض میکنیم و سه بعد مَ را ج و دَ و هَ و مکعب مستطیل ثالثی مً توهم میکنیم بابعاد ج و د و هَ

پس دو مکعب مستطیل م و مً چون مشترکند در دو بعد ج و د نسبتشان مثل دو ارتفاع است باینصورت م : مً = ه : هَ

و بهمان دلیل مً : مَ = د : دَ

این دو تناسب را در هم ضرب میکنیم و در جملهٔ اولش را بر مً قسمت میکنیم چنین میشود

م : مَ = د × ه : دَ × هَ (۱)

و سابق ذکر شده که دو قاعده قه و قهَ از دو مکعب مستطیل بر نسبت دو مسطح د × ه و دَ × هَ است پس م : مَ = قه : قهَ (۲)

قضیّهٔ دوازدهم

دو مکعب مستطیل بر نسبت دو حاصل ضرب قاعده خود باشند در دو ارتفاع و بعبارت اخری بر نسبت دو حاصل ضرب سه بعد خود باشند

برهان - فرض میکنیم ع ارتفاع مکعب مستطیل م باشد و ح و د دو بعد قاعده اش ق
ونیز ع′ ارتفاع مکعب مستطیل م′ باشد و ح′ و د′ دو بعد قاعده اش ق′ و م″ مکعب مستطیل باشد بارتفاع ع و بقاعده ق′

پس دو مکعب م و م″ چون برارتفاع واحد میباشند بنابر قضیهٔ سابقه

م : م″ = ق : ق′

و دو مکعب م″ و م′ چون بر قاعدهٔ واحد اند ق ۱۰ پس

م″ : م′ = ع : ع′

حال این دو تناسب را در هم یکر ضرب میکنیم و دو جملهٔ نسبت اول را بم″ قسمت میکنیم چنین میشود

م : م′ = ق × ع : ق′ × ع′ (۱)

و از خارج میدانیم که دو قاعده ق و ق′ بنسبت دو سطح ح × د و ح′ × د′ باشند پس

ق × ع : ق′ × ع′ = ح × د × ع : ح′ × د′ × ع′

و نظر بنسبت مشترکه م : م′ = ح × د × ع : ح′ × د′ × ع′ (۲)

در مساحت مکعب مستطیل

تقدیر و مساحت هر مکعب مستطیلی مثل م عبارتست از یافتن نسبتش بمکعب مستطیل م′ که واحد فرض شده باشد

و از روی تناسب (۲) چنین معلوم میشود که برای یافتن این نسبت باید ابعاد ح و د و ع و ح′ و د′ و ع′ را با واحد طول اندازه گرفت و حاصل ضرب سه عدد اول را قسمت نمود بر حاصل ضرب سه عدد ثانی

و اینحساب خیلی آسان شود هرگاه واحد حجم م′ را مکعبی اختیار کنیم که ضلعش واحد طول باشد چونکه آنوقت اعداد نظایر ح′ و د′ و ع′ هرکدام واحدی شوند و تناسب (۲) چنین میشود

م : م = ح × ط × ع : ۱

و بنا براین مساحت مکعب مستطیل مساوی است با حاصل ضرب سه بعدش در همدیگر و باید ملتفت شد که حاصل ضرب ح × ط عدد مراتی است که در قاعده و مکعب مستطیل م بگنجد مربع واحد طول

پس مساحت مکعب مستطیل نیز مساوی شود با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع (بنا برانکه واحد سطح مربعی باشد از واحد طول و واحد حجم مکعبی باشد مرسوم بر همان واحد طول)

مثال اولاً ح = ۱،۵۱ م و ط = ۳،۲۵ م و ع = ۲،۴۵ م

و مساحت مکعب مستطیل این میشود ۲،۵۱ × ۳،۲۵ × ۲،۴۵ = ۱۹،۹۸۵۸۷۵

پس حجم مکعب مستطیل دارا باشد ۱۹ متر مکعب ۹۸۵۸۷۵ هزار هزارم متر مکعب را یا ۱۹ متر مکعب ۹۸۵ دسیمتر مکعب ۸۷۵ سانتیمتر مکعب را زیرا که در حساب ذکر نموده ایم که دسیمتر مکعب هزارم جزء متر مکعب است و سانتیمتر مکعب هزارم جزء دسیمتر مکعب

ثانیاً - ح = ۱۵۱ ، ۲۵ متر مکعب و ع = ۱۲،۵ متر و مساحت مکعب مستطیل این باشد

۱۲،۵ × ۱۵۱ × ۲۵ یا ۳۱۸،۸۷۵ پس حجمش این باشد ۳۱۸،۸۷۵ متر مکعب

قضیهٔ سیزدهم

اصل

حجم هر متوازیة السطوح و بطور کلی از هر منشور مساویست با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاعش

برهان - اولاً چون هر متوازیة السطوح معادلست با مکعب مستطیلی که برارتفاع آن باشد و بر قاعدهٔ معادل با قاعده اش و مساحت جسم ثانی مساویست با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع پس مساحت حجم اول نیز مساوی باشد با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع

ثانیاً - هر منشور مثلث القاعده چون نصف متوازیة السطوحی است که بهمان ارتفاع باشد

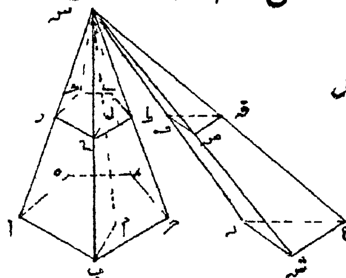
و بر قاعده مضاعف وی و مساحت حجم ثانی مساویست با حاصل ضرب قاعده‌اش در ارتفاع
پس مساحت حجم منشور مثلث القاعده مساوی باشد با حاصل ضرب قاعده‌اش که نصف قاعده متوازی
السطوح است در ارتفاع خود

ثالثاً - هر منشور غیر مثلث القاعده را چون مستون تفصیل نمود با نقدر منشورات مثلث القواعد
کثیر الاضلاع قاعده‌اش بمثلثات قسمت شود و مساحت هر کدام ازین منشورات مثلث القواعد
مساویست با حاصل ضرب قاعده خود در ارتفاع وارتفاع در همه یکیست پس مجموع مساحتهای
منشورات جزئیه مساوی باشد با مجموع مثلثات اجزای قاعده ضرب در ارتفاع مشترک پس
مساحت هر منشور مطلقا مساویست با حاصل ضرب قاعده‌اش در ارتفاع آن

نتیجه - چون دو منشور بیک ارتفاع اختیار کنیم نسبت دو حاصل ضرب هر قاعده در ارتفاع
خود بر نسبت دو قاعده باشد پس دو منشور یکه بر یک ارتفاع باشند نسبتشان
مثل دو قاعده است و بهمین دلیل دو منشور یکه بر یک قاعده باشند نسبتشان
مثل دو ارتفاع است

قضیه چهاردهم ۱۴

هرگاه هر مجسم مثل س ا ب ج د ه را قطع نمائیم بموازات قاعده‌اش بسطح ی ح ط گوئیم
اولاً اضلاع س ا و س ب و س ج و غیره وارتفاع س م بر یک نسبت قطع شوند بر نقاط
د و ح و ط و غیره و بر نقطه ل



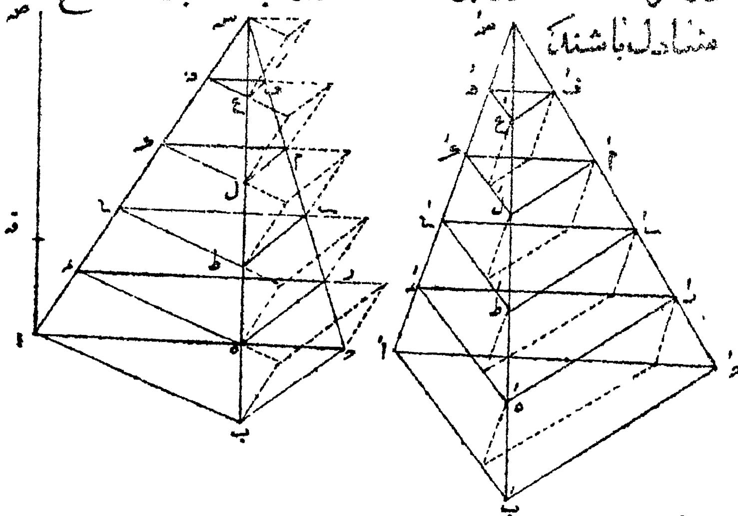
و ثانیاً مقطع ی ح ط ... کثیر الاضلاعی باشد
مشابه قاعده ا ب ج د ه

برهان - اولاً چون دو سطح ا ب ج د ه و ی ح ط
متوازی میباشند دو فصل مشترک ا ب و ی ح

با بین آنها و سطح ثالث سه اب متوازی شوند پس دو مثلث سه اب و سه دی متشابه شوند
و این تناسب حاصل شود سه ا : سه د = سه ب : سه ی و همچنین سه ب : سه ی = سه ح
: سه ط و هکذا سایر اضلاع پس جمیع اضلاع سه ا و سه ب و سه ح و غیره بر یک نسبت
قطع شده اند بر نقاط د و ی و ط و غیره و ارتفاع سه م نیز بهمان نسبت بر نقطه ل قطع شده
زیرا که ب م و ی ل متوازی هستند و بنابراین سه م : سه ل = سه ب : سه ی
ثانیاً- چون دی موازیست با اب و ی ط با ب ح و ط ک با ح د و غیره پس
زاویه د ی ط = ا ب ح و ی ط ک = ب ح د و هکذا و علاوه بران نظر بتشابه دو مثلث سه
اب و سه دی این تناسب حاصل شود اب : دی = سه ب : سه ی و نظر بتشابه دو مثلث
سه ب ح و سه ی ط این تناسب سه ب : سه ی = ب ح : ی ط پس اب : دی = ب ح
: ی ط و هکذا ب ح : ی ط = ح د : ط ک و هکذا سایر اضلاع پس دو کثیر الاضلاع اب ح د ه
و دی ط ک ل زوایاشان نظیر بنظیر متساوی باشند و اضلاعشان متناسب پس متشابه باشند
نتیجه- فرض میکنیم سه اب ح د ه و سه ن ش ع دو هرم باشند بیک ارتفاع و دو قاعده آنها
در یک سطح باشند پس اگر آنها را بسطحی موازی قاعده قطع کنیم دو مقطع حاصل شود دی ط
ک ل و ف ص ق و گوئیم این دو بر نسبت دو قاعده اب ح د ه و ن ش ع باشند
برهان- دو قاعده اب ح د ه و دی ط ک ل چون متشابه هستند نسبتشان مثل مربع
دو ضلع متقابل اب و دی است ولی اب : دی = سه ا : سه د پس اب ح د ه : دی ط
ک ل = $\overline{\text{سه ا}}^2$: $\overline{\text{سه د}}^2$ و بهمان دلیل ن ش ع : ف ص ق = $\overline{\text{سه ن}}^2$: $\overline{\text{سه ف}}^2$ و چون دو مقطع
دی ط ... ف ص ق از یک سطح مستوی حاصل میشوند سه ا : سه د = سه ن : سه ف پس
اب ح د ه : دی ط ک ل = ن ش ع : ف ص ق یعنی که دو مقطع بر نسبت دو قاعده هرم شدند پس
اگر آن دو قاعده متعادل باشند دو مقطعی که بیک ارتفاع حاصل شوند متعادل گردند

قضیهٔ پانزدهم ١٥

دو هرم مثلث القاعده که بر دو قاعدهٔ متعادله باشند و بر دو ارتفاع متساوی متعادل باشند



برهان — فرض میکنیم سو اب ج و سو اَبَ دَ اند و هرم باشند بر دو قاعده متعادل اب ج و اَبَ دَ واقعه در یک سطح و برارتفاع واحد صا پس اگر بگوئید متساوی نیستند فرض میکنیم سو اب ج کوچکتر باشد و اق ارتفاع منشوری باشد که بر قاعده اب ج معادل تفاضل آنها است ارتفاع مشترک اص را باجزای متساویه چند قسمت میکنیم که هر کدام اقصر باشد از اق و فرض میکنیم هر یکی از این اجزا باشد و از نقاط تقسیم ارتفاع سطوحی بموازات قاعده مرور میدهیم پس هر دو مقطع که در این دو هرم بیک سطح حاصل شده باشند متعادل میشوند (صحیفه ١٤) مثلا ده و با دَهَ و ط با طَ و غیره و بعد از این مقدمه بر قواعد مثلثه اب ج و ده و ح ط و غیره منشورات خارجیه طرح میکنیم که خط الرأسهاشان اجزای اه و هح و ح ل و غیره باشند از خط الرأس سوا و هکذا بر قواعد مثلثه دَهَ و طَ و لَ مَ و غیره در هرم

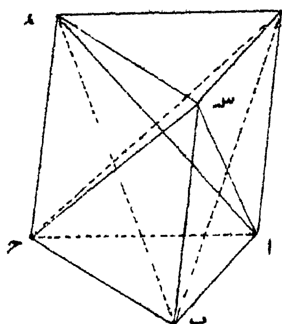
منشورات داخلیه طرح میکنیم که خط الراس هاشان اجزای خط الراس سه‌ا باشند نظایر اجزا مذکوره وارتفاع واحد جمیع این منشورات ه است

دره‌رم سه اب ج مجموع منشورات خارجیه اعظم است ازین هرم و در هرم سه اَبَجَ برخلاف مجموع منشورات داخلیه اصغر است از نه‌رم وباین دو سبب تفاضل باین دو مجموع منشورات اعظم میشود از تفاضل ما بین دو هرم

وابتدا از دو قاعده اب ج و اَبَ جَ منشور خارجی دویم مه ه ح معادلست با منشور داخلی اول مَهَ وَ اَ چونکه دو قاعده آنها مه و و مَهَ وَ معادلند و هردو بارتفاع ه و بهمین دلیل منشور خارجی سیم ح ط ل معادلست با منشور داخلی دویم حَ ط مَ و منشور خارجی چهارم با منشور داخلی سیم وهمچنین آخرین منشور آنها پس بازاء جمیع منشورات خارجیه هرم سه اب ج غیر از منشور اول اب ج د منشورات داخلیه معادله موجود است در هرم سه اَبَ جَ پس منشور اب ج د تفاضل باشد ما بین مجموع منشورات خارجیه هرم سه اب ج و مجموع منشورات داخلیه هرم سه اَبَ ج و سابق مبرهن شد که تفاضل ما بین این دو مجموع اعظم است از تفاضل ما بین دو هرم پس لازم شد که منشور اب ج د اعظم باشد از منشور اب ج ق و حال آنکه اصغر است زیراکه هردو بر قاعده واحده اب ج طرح شده اند وارتفاع منشور اول ه اقصر است از ارتفاع منشور دویم اق پس معلوم شد که فرض مبدا صحیح نیست و بنابراین دو هرم سه اب ج و سه اَبَ ج که بر دو قاعده متعادله اند و بر دو ارتفاع متساوی متعادل باشند

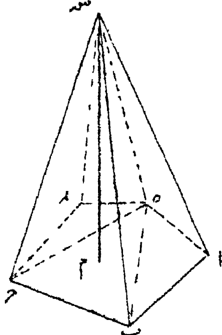
قضیهٔ شانزدهم

حجم هر هرم مثلث القاعده ثلث منشور مثلث القاعده است که بر قاعده و ارتفاع او با شد فرض میکنیم سه اب ج هرم مثلث القاعده باشد و اب ج د ه سه منشور مثلث القاعده بر قاعده وارتفاع آن و میگوییم این هرم ثلث منشور است



برهان. وضع کنید از منشور هرم س ا ب ج را تا باقی ماند جسم س ا ج د ه و آنرا میتوان هرم مربع القاعده دانست بر رأس س و بر قاعده متوازی الاضلاع ا ج د ه و قطر ج ه را وصل کنید و سطح س ج ه را مرور دهید تا از آن دو هرم مثلث القاعده س ا ج ه و س د ج ه قسمت کند و ارتفاع مشترک این دو هرم عمودیست وارد از رأس س بر سطح ا ج د ه و دو قاعده آنها متساوی باشند چونکه دو مثلث ا ج ه و د ج ه هر کدام نصف متوازی الاضلاع است پس این دو هرم متعادل باشند و اما دو هرم س د ج ه و س ا ب ج دو قاعده شان ا ب ج و د ه س متساوی باشند و بر یک ارتفاع عند چونکه این ارتفاع عبارت است از فاصله مابین دو سطح متوازی ا ب ج و د ه س پس این دو هرم س ا ب ج و س د ج ه متعادل باشند و ثابت نمودیم که هرم س د ج ه معادلست با س ا ج ه پس سه هرم س ا ب ج و س د ج ه و س ا ج ه که اجزای منشور ا ب د میباشند متعادل هستند و بنابرین هرم س ا ب ج ثلث منشور ا ب د است که بر قاعده و ارتفاع واحد میباشند

نتیجه. مساحت جسم هر هرم مثلث القاعده مساویست با ثلث حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع



قضیهٔ هفدهم ۱۷

مساحت جسم هر هرم مربع و مطلق مثل س ا ب ج د ه مساویست با ثلث حاصل ضرب قاعده اش ا ب ج د ه در ارتفاعش س م

برهان. چون دو سطح س ه ب و س ه ج را مرور دهیم

بر دو قطر ه ب و ه ح هرم مفروض که قاعده‌اش کثیر الاضلاع بود قسمت میشود بر چند هرم مثلث القاعده که جمیعاً بارتفاع مشترک س م باشند و بنا بر قضیهٔ سابقه مساحت هر کدام ازین اهرام مساویست با حاصل ضرب یکی از قواعد ا ب ه و ب ح ه و ح د ه در ثلث ارتفاع مشترک س م پس مساحت مجموع این اهرام مثلث القواعد یعنی مساحت هرم مفروض مساویست با مجموع مثلثات ا ب ه و ب ح ه و ح د ه یعنی کثیر الاضلاع قاعده ا ب ح د ه ضرب در $\frac{1}{3}$ س م پس مساحت هر هرم مساویست با ثلث حاصل ضرب قاعده‌اش در ارتفاع

نتیجهٔ ۱ - حجم هر هرم ثلث منشوریست که بر قاعده و ارتفاع آن باشد

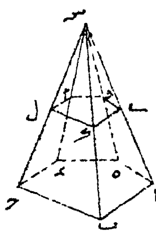
نتیجهٔ ۲ - نسبت دو هرم که بیک ارتفاع واحد باشند مثل نسبت قاعدهٔ آنها است و هرگاه بر یک قاعده باشند مثل نسبت ارتفاع آنها است

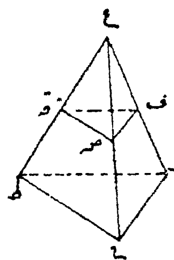
شرح - هر جسم کثیر السطوح را میتوان مساحت کرد باینکه تقسیمش نمائیم بر چند هرم و طریق تقسیم بر چند وجه است آسانترش اینست که سطوح تقسیم را مرور دهیم بر راس یکی از زوایای مجسمه و عدد اهرام جزئیه برابر است با عدد سطوحیکه جسم مفروض دارد غیر از آن چند سطحیکه محیط اند بر آن زاویهٔ مجسمه و هر کدام ازین اهرام را میتوان تقسیم نمود بر چند چهار سطحی باینکه قاعده‌اش را قسمت کنیم بمثلثات

قضیهٔ هیجدهم

هرگاه هرمی را بموازات قاعده‌اش قطع کنیم مساحت حجم هرم ناقصیکه بعد از وضع هرم کوچک باقی میماند مساویست با مجموع سه هرمیکه ارتفاع مشترکشان همان ارتفاع هرم ناقص باشد و سه قاعدهٔ آنها یکی قاعدهٔ سفلای هرم ناقص باشد و دیگر قاعدهٔ علیایش و دیگر قاعده که واسطه در نسبت باشد مابین ان دو قاعده

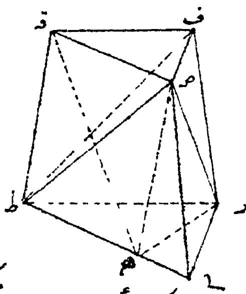
بنوعها فرض میکنیم س ا ب ح د ه هرمی باشد مقطوع بسطح [illegible] ل م بموازات قاعده‌اش و ع و





هرمی باشد مثلث القاعده که قاعده و ارتفاعش
معادل و مساوی بیاشد با قاعده و ارتفاع
هرم مفروض و نیز فرض میکنیم که دو قاعده‌ها
در یکسطح باشند و آنوقت سطح ـ ل م را
امتداد میدهیم تا هرم مثلث القاعده را
قطع کند بمقطع ف صه ق و اینمقطع بارتفاع هرم ناقص است و بنابراین نسبت مقطع ف صه ق
بمقطع ـ ل م مثل قاعده ی ح ط است بقاعده اب د و ۱۴ و چون دو قاعده بفرض ما
متعادل میباشند دو مقطع نیز متعادلند پس دو هرم س ـ ل م ن و ع ف صه ق چون
برارتفاع واحد و بر دو قاعده متعادله اند متعادل باشند و دو هرم تام س اب ج د ه
و ع ی ح ط بهمان دلیل متعادلند پس بعد از وضع دو تای اول از دو تای ثانی دو هرم ناقص
باقی اب د م ـ ل و ی ح ط ق ف صه متعادل شوند و بنابرین کافیست که حکم مذکور را
مبرهن نمائیم در هرم ناقص مثلث القاعده

پس فرض کنیم ی ح ط ق ف صه هرم ناقص مثلث القاعده باشد بر دو قاعده متوازیه و بر



سه نقطه د و صه و ط سطحی مرور میدهیم تا جدا
کند از هرم ناقص هرم مثلث القاعده صه ی ح ط را
قاعده این هرم همان قاعده سفلای ی ح ط هرم
ناقص است و ارتفاعش همان ارتفاع چونکه رأسش
صه بر سطح قاعده علیای ف صه ق واقع است

بعد از وضع این هرم باقی میماند هرم مربع القاعده صه ط د ق ف که رأسش صه است و قاعده‌اش
ف ق ط د حال بر سه نقطه ف و صه و ط سطحی مرور میدهیم تا هرم مربع القاعده را قسمت کند بدو

هرم مثلث القاعده صه ر ف ط و صه ف قه ط وقاعده هرم ثانی همان قاعده علیای
صه ف قه هرم ناقص است وارتفاعش همان ارتفاع چونکه راسش نقطه ط در قاعده سفلا
است پس از جمله ۳ هرمی که میباید هرم ناقص را ترکیب کنند دو تا یش بدست آمد
باقی ماند ملاحظه هرم سیم صه ر ف ط پس صه هر را بموازات قه ط رسم میکنیم و هرم جدید
تو هم میکنیم که راسش بر ه باشد و قاعده اش ر ف ط حال این دو هرم مشارکند
در قاعده ر ف ط و ارتفاعشان نیز یکی است چونکه دو راسشان صه و ه در واقع
میباشند بر خط صه ه که موازیست با ط قه و بنابرین با سطح قاعده پس این دو هرم متعادل
باشند ولی هرم ف ر ه ط را میتوان چنان تصور کرد که راسش بر ف باشد
و بنابراین با ارتفاع هرم ناقص است واما قاعده اش ر ه ط واسطه در نسبت با
مابین دو قاعده ر ح ط و ف صه قه برهان در دو مثلث ر ط ه و ف صه قه زاویه
ط = قه و ضلع ط ه = قه صه پس ر ط ه : ف صه قه = ر ط : ف قه و نیز د
ط ح : ر ط ه = ط ح : ط ه یا : قه صه ولی نظر بتشابه دو مثلث ر ح ط و ف صه قه این تناسب
حاصل شود ط ح : قه صه = ر ط : ف قه پس ر ح ط : ر ط ه = ر ط ه : ف صه قه
پس قاعده ر ط ه واسطه هندسیه مابین دو قاعده ر ح ط و ف صه قه پس هرم
ناقص مثلث القاعده که دو قاعده اش متوازی باشند معادلست با ۳ هرمی که مشارکت
باشند در ارتفاع همان هرم و قواعدشان یکی قاعده سفلای هرم ناقص باشد و دیگر
قاعده علیایش و دیگر واسطه نسبت مابین همان دو قاعده

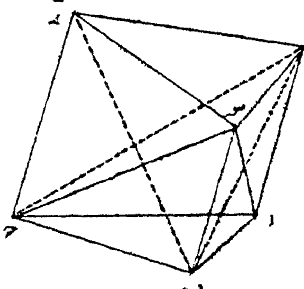
قضیه ۱۹ نوزدهم

چون منشور مثلث القاعده را که بر قاعده اب ح باشد قطع کنیم بسطحی
ده سه مائل نسبت باین قاعده پس جسم اب ح ده سه که در تحت سطح قاطع

باقی میماند مساوی باشد با مجموع سه هرم که رؤسشان بر نقاط ، وه و ﺳﻪ باشند و قاعده مشترکه انها بر اب ح

برهان بر سه نقطه س و ا و ح سطحی مرور دهیم تا جدا کند از منشور ناقص اب ح ده سه هرم مثلث القاعده س اب ح را که قاعده اش اب ح است و رأسش س و بعد از وضع ا هرم باقی ماند هرم مربع القاعده س اح ده که رأسش نقطه س است و قاعده اش اح ده پس بر سه نقطه س و ه و ح نیز سطحی مرور دهیم تا هرم مربع القاعده را قسمت کند بدو هرم مثلث القاعده س اده و س ح ده

هرم س اه ح که قاعده اش مثلث اه ح است و رأسش نقطه س معادل میباشد با هرم ه اب ح که قاعده اش اه ح است و رأسش نقطه ب زیرا که هر دو بر قاعده واحده اند و برارتفاع واحد و اتحاد ارتفاع نظر باینست که خط ب س موازیست با دو خط اه و ح د و بنا بر این با سطحشان اح ه پس این دو هرم متعادل گشتند و هرم ثانی ه اب ح را میتوان بر قاعده اب ح فرض نمود و بر رأس ه

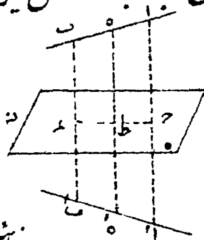


و هرم سیم س ح ده را اول بدل کنیم بهرم اس ح د زیرا که این دو بر قاعده واحده س ح د باشند و برارتفاع واحد چونکه اه موازیست با سطح س ح د پس این دو هرم متعادل گشتند و هرم ثانی اس ح د را میتوان مبدل نمود بهرم اب ح د زیرا که هر دو بر قاعده واحده اح د باشند و نیز برارتفاع واحد چونکه دو رأسشان س و ب واقع باشند بر خطی موازی با سطح قاعده پس هرم س ح ده معادل شد با هرم اس ح د و این هرم با اب ح د و هرم اخیر را میتوان بر قاعده

اب ج فرض نمود و بر راس د پس با حجم منشور ناقص اب ج د ه س مساویست
با مجموع سه هرم که بر قاعده واحده اب ج باشند و رؤسشان بنقاط د و ه و س
نتیجه — هرگاه خطوط الراسهای ه و ب س و ج د عمود باشند بر قاعده خود ارتفاعات
شوند در سه هرم جزء منشور ناقص و آنوقت مساحت منشور چنین میشود
$\frac{1}{3}$ اب ج × اه + $\frac{1}{3}$ اب ج × ب س + $\frac{1}{3}$ اب ج × ج د و آن باینصورت
تحویل میشود $\frac{1}{3}$ اب ج × (اه + ب س + ج د)

در تقارن اشکال

دو نقطه را نسبت بسطحی متقارن و قرینه گوئیم هرگاه این سطح عمود باشد بر وسط خط واصل مابین
آن دو نقطه و آن سطح را سطح تقارن گوئیم
و دو شکل را نسبت بسطحی قرینه گوئیم هرگاه قرینه هر نقطه از یکیشان موجود باشد در شکل دیگر



قضیه بیستم ۲۰

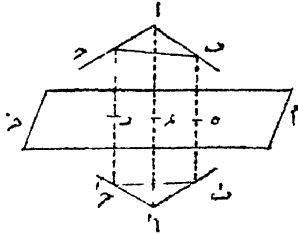
هر خط مستقیم مثل اب را قرینه خطی است مستقیم
برهان — بر خط مفروض دو نقطه ا و ب فرض کنید و قرینه
آنها اَ بَ را باین وجه بدست آورید که از این دو نقطه عمود
بر سطح م ه فرود آورید و هر کدام را باندازه خود امتداد دهید و دو خط اب و اَ بَ را وصل نمائید
حال باید ثابت کنیم که قرینه هر نقطه از اب مثلا ه واقع میشود بر خط اَبَ پس عمود
ه ط را بر سطح م ه فرود آوریم و امتدادش دهیم تا تلاقی کند اَبَ را
و چون ذو اربعه اضلاع ا ج ب د را حول ج د دوران دهیم تا واقع شود بر سطح
ج اَ بَ د نظر بدو زاویه قائمه ا ج د و اَ ج د خط ج ا واقع شود بر ج اَ و چون
ج ا = ج اَ نقطه ا واقع شود بر اَ و بهمین دلیل د ب بر د بَ و آنوقت اب منطبق

شود بر اَبْ و علاوه بر آن چون دو زاویه ه‌طح و هٔ‌طح قائمه‌اند طه واقع شود بر استقامت طهٔ پس چون نقطه ه میبایست یکمرتبه واقع شود بر دو خط اَبْ و طهٔ واقع خواهد شد بر هٔ و بنابراین ه‌ط = هٔ‌ط و هٔ قرینه نقطه ه باشد

نتیجه - ضمناً ثابت شد که خط اب واصل مابین دو نقطه ا و ب مساویست با اَبْ واصل مابین دو قرینشان

قضیه بیست و یکم[21]

زاویه حادثه مابین دو خط اب و اح مساویست با زاویه حادثه مابین دو قرینشان اَبْ و اَحْ



برهان - اول باید دانست که قرینه نقطه ا فصل مشترک مابین دو خط اب و اح نقطه اَ باشد چونکه این قرینه باید یکمرتبه واقع شود بر دو خط اَبْ و اَحْ

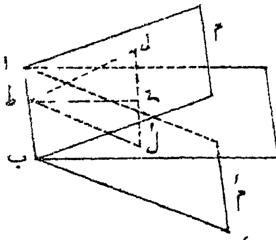
حال بر اب و اح دو نقطه ب و ح فرض میکنیم و دو قرینه آنها را مشخص میکنیم بْ است و حْ و دو خط بح و بْحْ را وصل میکنیم

پس دو مثلث ابح و اَبْحْ مساوی باشند و (نتیجه ۲۰) زاویه باح = بْاَحْ

قضیه بیست و دوم[22]

قرینه هر سطح مستوی سطحی است مستوی و دو زاویه حادثه مابین این دو سطح و سطح تقارن متساوی باشند

برهان - خط اب فصل مشترک است مابین سطح م اب و سطح تقارن ابح و بر خط اب سطح اب مْ را چنان میگردانیم که زاویه حادثه مابین آن و سطح تقارن برابر با



با زاویه که از سطح مفروض حادث شده

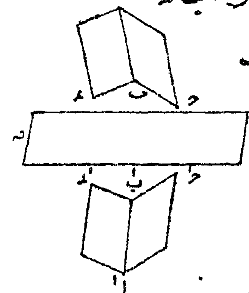
وحال باید ثابت کنیم که قرینهٔ هر نقطه از سطح اب م مثل نقطهٔ ل واقع میشود بر سطح اب م' مثل پس عمود ل ح را بر اب ح فرود آوریم وامتداد دهیم تا قطع کند سطح اب م' را بر نقطهٔ ل' وبعد ح ط را عمود کنیم بر اب ودو خط ل ط و ل' ط وصل کنیم

این دو خط عمود باشند بر اب ودو زاویه ل ط ح و ل' ط ح متساوی شوند چون هر دو مقیاسند دو زاویه دو سطحی متساویه م اب ح و م' اب ح را پس دو مثلث قائم الزاویه ل ط ح و ل' ط ح چون مشارکند در ضلع ط ح و یک زاویه حاده شان متساویست متساوی شوند وآنوقت ل ح = ل' ح پس ل' قرینهٔ نقطهٔ ل باشد واین حکم کلی است در سایر نقاط

تنبیه - هرگاه سطح مفروض موازی باشد سطح تقارن اب ح را ظاهر است که در ینصورت قرینه اش سطح دیگر است موازی با اب ح وبهمان فاصله واقع است

قضیهٔ بیست وسیم

زاویهٔ دو سطحی حادثه مابین دو سطح اب ح و اب د متساویست با زاویهٔ حادثه مابین دو قرینه شان ا' ب' ح' و ا' ب' د'

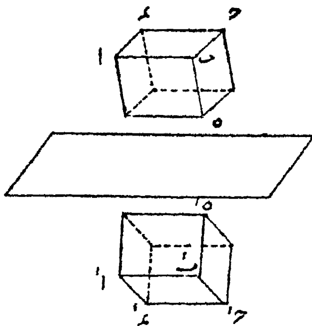


برهان اول باید دانست که قرینهٔ خط اب فصل مشترک مابین دو سطح اب ح و اب د خط ا' ب' است فصل مشترک مابین دو سطح ا' ب' ح' و ا' ب' د' پس بر نقطهٔ ب مقیاس زاویه دو سطحی اب را رسم میکنیم وآن زاویه ح ب د است وهمچنین بر نقطه

ب قرینه ب مقیاس زاویه دو سطحی اب را رسم میکنیم و از زاویه مسطحه ح ب د است سطح اب
حال قرینه خط ب د واقع در سطح ا ب د خطی باشد مرور کننده بر نقطه ب و واقع در
علاوه بر آن چون ب د عمود است بر اب قرینه اش عمود باشد بر اب و ۲۱ پس چنین
خط ب د میشود و بهمین دلیل ثابت میکنیم که ب ح قرینه ب ح است پس زاویه ح ب د
= ح ب د و ۲۱

قضیه بیست و چهارم ۲۴

هرگاه دو کثیر السطوح نسبت بسطحی قرینه باشند گوئیم اولاً سطوح اطراف شان نظیر بنظیر متساوی میباشند و ثانیاً زوایای مجسمه متناظره انها قرینه میباشند (مقاله پنجم)



برهان - اولاً نقاط ا ب و ح و د روش یکی از سطوح اطراف یکی از دو کثیر السطوح باشد و قرینه انها ا و ب و ح و د نیز در یک سطح واقع شوند و ۲۲ و علاوه بر آن این دو کثیر الاضلاع اب ح د و ا ب ح د متساوی هستند چونکه زوایا شان متساوی میباشند و اضلاعشان نیز نظیر بنظیر متساوی و ۲۰ و ۲۱

ثانیاً - دو زاویه مجسمه متناظره ب و ب سطوحشان متساوی باشند و ۲۱ و زوایای دو سطحیشان نیز متساوی ولی سطح ا ب ه را بر متساوی خود ا ب ه نقل کنیم بر وجهیکه سایر خط الراسهای دو زاویه مجسمه در یکسمت سطح مشترک واقع شوند ظاهر است که سایر زوایای سطحیه اندو زاویه بعکس ترتیب واقع میشوند پس زاویه مجسمه ب قرینه زاویه ب است

نتیجه ۱ - از این حکم چنین معلوم میشود که هر کثیر السطوحی مثل ك را یک قرینه بیشتر نباشد زیرا که

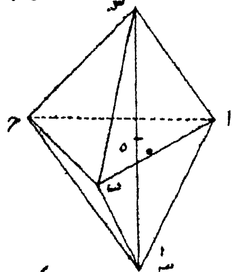
چون لَ و لً را دو قرینه لَ فرض کنیم نسبت به سطح مختلف الوقت سطوحشان ج ع
مساوی میباشند با سطوح لَ متساوی میشوند و زوایای مجسمه شان چون قرینه زوایای
مجسمه لَ هستند متساوی میشوند پس دو کثیر السطوح لُ و لً قابل انطباق باشند بر یکدیگر

نتیجه ۲ ـ چون کثیر السطوح لَ را منحل نمائیم باهرام مثلث القواعد که رأس مشترکشان
یکی از رؤس کثیر السطوح باشد هر کدام از این اهرام اهرامی قرینه باشد در کثیر السطوح لَ
پس هر دو کثیر السطوح قرینه را میتوان تقسیم نمود بچندین چهار سطحی که نظیر بنظیر قرینه یکدیگر باشند

شرح ـ دو کثیر السطوحیکه سطوحشان نظیر بنظیر متساوی باشند و زوایای مجسمه شان قرینه یکدیگر
آنها را همواره قرینه گوئیم بهر وضع باشند نسبت بیکدیگر ولیکن در این صورت تقارن همین
در شکل آنها است نه در وضعشان

تنبیه ـ در آنچه ذکر شد مقصود ما از دو زاویه مجسمه متناظره آنهاست که رؤسشان قرینه یکدیگر باشند

قضیه ۲۵ فی بحجم



دو کثیر السطوح قرینه متعادل باشند

برهان ـ چون مذکور شد که دو کثیر السطوح قرینه را میتوان تجزیه نمود بچندین چهار سطحی قرینه پس اثبات حکم
مذکور در دو چهار سطحی قرینه کفایت میکند

شکل س ا ب ح جسمی است چهار سطحی و قرینه اش را طرح میکنیم بنا بر آنکه سطح تقارن یکی از
سطوح آن باشد مثل ا ب ح و (نتیجه ۲۴) و این دو جسم متعادل باشند چونکه قاعده واحده
ا ب ح هستند و بر دو ارتفاع متساوی س ه و س‌ ه

تعریف ـ دو نقطه ا و اَ را قرینه گوئیم نسبت بنقطه ثالثه ه هرگاه خط واصل مابین این دو نقطه تنصیف
شده باشد بنقطه ه که مرکز تقارن است

و دو شکل را نسبت به نقطهٔ قرینه گوئیم هرگاه قرینهٔ هر نقطه از یکی از آنها در شکل دیگر باشد
در تقارن نسبت به نقطه احکام چند است مانند آنچه سابق ذکر شده و هرگاه شخص آن احکام را
خوب آموخته باشد این احکام را به آسانی مبرهن سازد پس ما از ذکر آنها مستغنی باشیم و در عهدهٔ متعلمین گذاریم

در تشابه اجسام

دو کثیر السطوح را متشابه گوئیم هرگاه سطوح اطرافشان متشابه باشند نظیر بنظیر و زوایای مجسمهٔ
متناظرهٔ شان متساوی باشند و مقصود از زوایای متناظره آنها باشد که سطوح اطرافشان متشابه باشند
و در دو کثیر السطوح متشابه هر دو خط واصل مابین رؤس متناظره را متناظر گوئیم

قضیهٔ بیست و ششم

در چهار سطحی ع ب ح ط چون خط الرأسهای ع ب و ع ح و ع ط را به نسبت
قسمت کنیم بنقاط ک و ن و ل و خطوط ک ن و ن ل و ک ل را وصل کنیم
جسم چهار سطحی جدید ع ک ن ل شبیه باشد بجسم اول

برهان - دو مثلث ع ک ن و ع ب ح چون در یک
زاویه مشارکند و اضلاع طرفین شان متناسب است متشابه باشند
و همچنین دو مثلث ع ن ل و ع ح ط و دو مثلث ع ک ل
و ع ب ط و چون دو خط ک ن و ن ل موازی میباشند
با ب ح و ح ط سطح ک ن ل موازیست با ب ح ط و مثلث ک ن ل متشابه با مثلث ب ح ط
و بالجمله هر دو زاویهٔ مجسمهٔ متناظره مثل ب و ک متساوی باشند چونکه نظیر متشابه سطوح اطراف
هر دو زاویهٔ سطحیهٔ متناظره متساوی باشند و این سطوح هم متشابهة الوضع اند پس دو جسم مفروض
سطوحشان متشابهند و زوایای مجسمهٔ متناظرشان متساوی و بنابراین متشابه باشند
شرح - باید این نکته را ملتفت بود که در دو جسم چهار سطحی متشابه خط الرأسهای متناظرشان متناسب

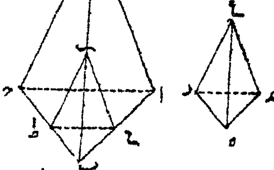
و بالعکس

و بالعکس اگر در دو جسم چهار سطحی خط الراسها متناسب باشند و متشابه الوضع پس آن دو جسم متشابه باشند زیرا که از تناسب اضلاع تشابه سطوح لازم آید و چون سطوح متشابه و متشابه الوضع شدند زوایای مجسمهٔ متناظره متساوی شوند چون زوایای سطحیشان نظیر بنظیر متساوی هستند

قضیهٔ بیست و هفتم

در دو چهار سطحی س ا ب ج و ع ه ر د هرگاه یک زاویهٔ دو سطحی مساوی باشند سطوح طرفینشان متشابه و متشابه الوضع اند و جسم متشابهاند

برهان- فرض میکنیم زاویهٔ دو سطحی س ب = ع ه و مثلث س ا ب متشابه با ع ه ر و مثلث س ب ج متشابه با ع ه د



و دو زاویهٔ مجسمهٔ س و ع چون یک زاویهٔ دو سطحیشان مساوی است و دو سطح طرفینشان متساوی و متشابه الوضع پس متساوی باشند و زاویهٔ ا س ج مساوی شود با زاویهٔ ر ع د و نظر بتشابه دو مثلث ا س ب و ر ع ه و نیز دو مثلث س ب ج و ع ه د این دو تناسب نتیجه شود

س ب : ع ه = س ا : ع ر

س ب : ع ه = س ج : ع د

پس س ا : ع ر = س ج : ع د

پس دو مثلث ا س ج و ر ع د متشابه باشند چون یک زاویه در آنها مساوی شد و اضلاع طرفین متناسب و بهمین دلیل ثابت میکنیم که دو زاویهٔ مجسمهٔ ب و ه متساوی هستند و بعد ا ب ج مشابه ر ه د و بالجمله دو زاویهٔ مجسمهٔ ا و ج متساوی باشند با دو زاویهٔ مجسمهٔ ر و د و چونکه زوایای سطحیشان نظیر بنظیر متساوی هستند پس دو جسم چهار سطحی متشابه باشند

قضیهٔ بیست و هشتم ۲۸

دو کثیر السطوح متشابه را میتوان تجزیه کرد بیک عده از اجسام چهار سطحی متشابه
و متشابه الوضع

برهان - در کثیر السطوح
سه دح طاب ح
جمیع سطوح را بمثلثات
قسمت میکنیم غیر از آنها که اطراف رأس سه باشند تمثلثات قواعد چهار سطحیهائی
باشند که رأس مشترک آنان نقطهٔ سه فرض شده و از مجموع آنها جسم اول ترکیب میشود
و همچنین در کثیر السطوح سه دح طاب ح سطوح غیر مجاور برأس سه را قسمت میکنیم بمثلثات
و این نقطه نظیر است با رأس سه و نقطهٔ سه را وصل میکنیم برؤس تمثلثات کثیر
السطوح ثانی قسمت شود بچند چهار سطحی و حال باید ثابت نمود که این چهار سطحیها متشابهند با چهار سطحیهای کثیر السطوح اول بنظیر
مثلا در دو چهار سطحی سه ط ح ا و سه ط ح ا دو مثلث سه ط ا و ح ط ا متشابهند با دو مثلث
سه ط ا و ح ط ا چونکه دو سطح ه ط ا سه و ه ط ا سه از طرفی متشابهند و دو سطح ح ط ا ب و ح ط ا ب
از طرفی دیگر و نظیر متساوی میل سطوح دو جسم مفروض زاویه دو سطحی ط ا مساوی است با ط ا پس
آن دو چهار سطحی متشابه باشند

حال در دو چهار سطحی سه ط ح د و سه ط ح د دو مثلث سه ط ح و سه ط ح چون دو
سطح متناظر اند از دو چهار سطحی متشابه متشابه باشند و نظیر متشابه دو کثیر الاضلاع د ه ط ح و
د ه ط ح مثلث د ط ح متشابه است با د ط ح و دو زاویه دو سطحی د ط ح ا و د ط ح ا
بفرض مسئله متساوی باشند و دو زاویه دو سطحی سه ط ح ا و سه ط ح ا بتشابه دو چهار سطحی
سه ط ح ا و سه ط ح ا متساوی هستند پس دو زاویه دو سطحی د ط ح سه و د ط ح سه تفاضل

آن چهار زاویه متساوی شوند پس دو چهار سطحی سه‌ده و سه‌دَدَه متشابه باشند و همچنین در سایر

تنبیه ۱ـ دو کثیر السطوح را ما از راس سه تجربه نمودیم و این تعمیم را بهر دو راس متناظر میتوان شروع کرد

تنبیه ۲ـ از قضیهٔ مذکوره بحکم نیز استنباط شود که در دو کثیر السطوح متشابه هر دو خط متناظر ا و اَ واصل باین روش متناظره متناسب باشند با هر دو خط الراس متناظر ب و بَ از دو جسم مفروض و برهان ـ دو خط ا و اَ دو خط الراس متناظر شوند از دو چهار سطحی متشابه از اجزای دو کثیر السطوح و این دو چهار سطحی البته شامل باشند دو خط الراس متناظر د و دَ از دو کثیر السطوح مفروض راس ا : اَ = د : دَ

و چون در دو کثیر السطوح متشابه خط الراسها متناظر نظر بتشابه سطوح متناسب میباشند

د : دَ = ب : بَ

و بنا برین ا : اَ = ب : بَ

قضیهٔ بیست و نهم[۲۹]

هر دو کثیر السطوح که ترکیب شده باشند از یک عدد از اجسام چهار سطحی متشابه و متناسبه الوضع سطوح ایشان نظیر بنظیر متشابه میشوند و زوایای مجسمهٔ متناظر شان متساوی و بنا برین اند و جسم مرکب متشابه باشند

برهان ـ در شکل سابق سه‌ا‌ب‌د و سه‌ا‌د‌ه و سه‌ده‌د و غیره اهرام اجزای کثیر السطوح اولند و سهَ‌اَ‌بَ‌دَ و سهَ‌اَ‌دَ‌هَ و سهَ‌دَ‌هَ‌دَ اهرام اجزای کثیر السطوح دویم

اولاً ـ نظر بتشابه چهار سطحیها دو مثلث ه‌د‌ا و د‌ا‌ب که یکسطح کثیر السطوح اول را ترکیب میکنند متشابه باشند با دو مثلث هَ‌دَ‌اَ و دَ‌اَ‌بَ از کثیر السطوح دوم و چون دو مثلث اول در یکسطح واقعند دو مثلث دوم نیز همچنین بُ‌نمد

زیرا که نظر متشابه دو هرم سداه و سداه و دو هرم سابح و سابح دو زاویه دو سطحی سداه و سداب مساوی باشند با دو زاویه دو سطحی سداه و سداب و چون مجموع دو تای اول دو قائمه است مجموع ثانی نیز دو قائمه باشد پس دو کثیر الاضلاع هدبا و هدبا مرکب میشوند از یک عده از مثلثات متشابه و متشابه الوضع و بنابراین متشابه باشند

و همین است حکم در باب هر دو سطح متناظر

ثانیاً- چون دو زاویه دو سطحی ح سداه و ح ساب مساوی باشند با دو زاویه دو سطحی ح ساه و ح ساب مجموع دو تای اول یعنی سا مساوی باشد با مجموع دو تای ثانی که سا است و بطور کلی هر دو زاویه دو سطحی متناظره دو کثیر السطوح چون مجموع زوایای دو سطحی متناظره اند از چهار سطحیهای متشابه متساوی باشند

پس هر دو زاویه مجسمه متناظره مثل ا و ا سطوح اطرافشان نظیر بنظیر متساوی باشند و متشابه الوضع و متساویة المیل و بنابراین آن دو زاویه متساوی باشند.

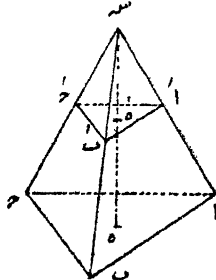
شرح- از روی دلیل مذکور تعریف سابق اشکال کثیر السطوح متشابهه تحقق میشود زیرا که همواره میتوان از یک عده از اجسام چهار سطحی متشابهه و متشابهة الوضع کثیر السطوح ترکیب نمود

چون مثلاً- کثیر السطوح سابجدهوبح را قسمت میکنیم بر اهرام مثلث القاعده چنانکه روسشان جمیعا بر س باشد مثل سبح و سادب و سداه و غیره و مجموع اینها کثیر السطوح اولست

حال چون خط الراسهائی را که بر نقطه س گذشته بیک نسبت قسمت کنیم بر نقاط ا و ب و ح و د و غیره چهار سطحیهای سابح و ساب و غیره متشابه و متشابه الوضع میشوند با چهار سطحیهای

سه ب ده و سه اده ب وغیره (۲۶) پس از مجموع آنها کثیر السطوح دیگر ترکیب شود که بقضیهٔ سابقه مشابه باشد با کثیر السطوح اوّل حال چون شبه منشور را میتوان مکانش را تغییر داده در محل دیگر نقل نمود

قضیهٔ سی ام (۳۰)



دو چهار سطحی متشابه بر نسبت دو مکعب هر دو خط الرأس متناظر خود باشند

بُرهان. چون دو هرم متشابه فرض شده اند میتوان کوچکتر را نقل نمود بر بزرگتر چنانچه زاویه مجسمه سه در هر دو مشترک باشد و در اینصورت دو قاعده اَ بَ حَ و اب ح متوازی میشوند چونکه خط الرأسهای سه ا و سه ب و سه ح بیک نسبت قسمت شده اند بر نقاط اَ و بَ و حَ

حال خط سه ه را عمود میکنیم بر اب ح

و دو مثلث اب ح و اَبَ حَ متشابه باشند و این تناسب حاصل شود

اب ح : اَبَ حَ = اب^۲ : اَبَ^۲ (۱)

و نیز اب : اَبَ = سه ا : سه اَ

و سه ه : سه هَ = سه ا : سه اَ

و نظر به نسبت مشترکه

سه ه : سه هَ = اب : اَبَ (۲) (حاشیه)

و چون اب ح × سه ه/۳ مساحت جسم چهار سطحی سه اب ح است و اَبَ حَ × سه هَ/۳ مساحت جسم چهار سطحی سه اَبَ حَ پس حکم ثابت است

(حاشیه)

و چون دو تناسب (۱) و (۲) را بترتیب در همدیگر ضرب کنیم و دو نسبت اولی را بر ۳ قسمت نمائیم چنین شود اب ح × سه ه/۳ : اَبَ حَ × سه هَ/۳ = اب^۳ : اَبَ^۳

قضیهٔ سی و یکم (۳۱)

دو کثیر السطوح متشابه بر نسبت دو مکعب هر دو خط الرأس متناظر است

برهان. سابق ذکر شد که دو کثیر السطوح متشابه را میتوان تجزیه نمود بیک عده از چهار سطحیهای متشابه و متشابه الوضع

پس فرض میکنیم ح و حَ و حً وغیره چهار سطحیهای اجزای کثیر السطوح ل باشند و ح و حَ و حً وغیره چهار سطحیهای اجزای کثیر السطوح ک

ونیز فرض میکنیم س و سَ و سً وغیره خط الراسهای چهار سطحیهای ح و حَ و حً .... باشند و س و سَ و سً .... خط الراسهای نظایر شان باشند از چهار سطحیهای ح و حَ و حً ...

پس این تناسبات حاصل شود ح : ح = س۳ : س۳

حَ : حَ = سَ۳ : سَ۳

حً : حً = سً۳ : سً۳

وغیره

و چون خطوط متناظره کثیر السطوح متشابه متناسب میباشند پس

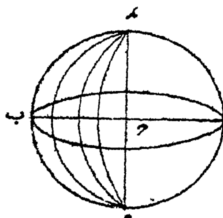
ح : ح : حَ : حَ = حً : حً ....

پس ح + حَ + حً ..... : ح + حَ + حً ..... = ح : ح = س۳ : س۳

یا ل : ک : س۳ : س۳ فهو المطلوب

مقالهٔ هفتم
در احوال کره
تعریف

۱- کره جسمی است محدود بسطحی منحنی که جمیع نقاطش بیک بعد باشند از نقطه درونی معروف بمرکز کره



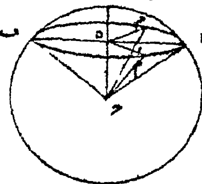
کره را میتوان توهم نمود بحرکت نصف دایره ء د ا ه حول قطر د ه زیرا که سطحی که بحرکت این منحنی توهم شود جمیع نقاطش بیکفاصله واقع میشوند از مرکز ح

۲- شعاع کره خطی است واصل ما بین مرکز و نقطه از سطحش و قطر یا محور خطی است که بر مرکز مرور کند و از طرفین منتهی شود بسطح جمیع اشعه کره بنا بر تعریف متساوی باشند و همچنین جمیع اقطار متساوی باشند هر کدام ضعف شعاع

۳- سطح را بر کره مماس گوئیم هرگاه در یک نقطه مشارکت باشند نه بیش

۴- دو کره را نسبت بهم مماس گوئیم هرگاه دو سطح آنها مشارکت باشند در یک نقطه نه بیش

قضیهٔ اول



فصل مشترک ما بین کره و سطح مستوی دایره است

برهان- خط ا م ب مقطع سطحی است در کره ح پس از مرکز ح عمود ح ه را بر سطح ا م ب فرود می‌آوریم و خطوط ح م و ح مَ را وصل میکنیم بنقاط مختلفه منحنی چند فصل مشترک خطوط مائله ح م و ح مَ و ح ب چون اشعه کره اند متساوی باشند پس متساوی البعد اند از موقع عمود ح ه یعنی خطوط ه م و ه مَ و ه ب متساوی باشند پس فصل مشترک ا م ب دایره باشد بمرکز ه

نتیجه ۱ ـ هرگاه سطح قاطع بر مرکز کره گذرد شعاعش بعینه شعاع کره است و بنابراین جمیع دوائری که بر مرکز کره مرور کنند مساوی باشند و آنها را دوایر عظام گوئیم

۲ ـ دو دایره عظیمه همدیگر را نصف کنند زیرا که فصل مشترکشان چون بر مرکز میگذرد قطر کره است

۳ ـ هر دایره عظیمه حجم و سطح کره را بر دو جزء مساوی قسمت کند زیرا که بعد از جدا شدن دو نیمه کره هر دو را بر قاعده مشترکه چنان قرار دهیم که حدبه شان بیک سمت افتد و سطح آنها بر همدیگر درست منطبق شود و الّا نقاطی در کره پیدا شود مختلفة البعد از مرکز

۴ ـ مرکز هر دایره صغیره و مرکز کره واقع باشند بر خطی عمود بر سطح دایره صغیره

۵ ـ دوائر صغار هر چند از مرکز کره ابعد باشند اصغر اند زیرا که هر چند فاصله ده بیشتر باشد وتر اب اقصر میشود و آن قطر دایره صغیره ام ب است

۶ ـ بر دو نقطه مفروضه بر صفحه کره همواره میتوان دایره عظیمه مرور داد زیرا که با دو نقطه و مرکز کره وضع سطح قاطع درست معین میشود ولی اگر آن دو نقطه بر طرفین قطر واقع باشند آنوقت سه نقطه مذکوره بر یک استقامت واقع میشوند و عدد دوایر عظامیکه میتوان بر آنها مرور داد غیر متناهی است

۷ ـ وضع دایره صغیره بر صفحه کره به سه نقطه محیطش مشخص شود

قضیه دوم

سطح عمود بر طرف شعاع مماس کره است

برهان ـ فرض میکنیم د ا ح سطحی باشد عمود بر طرف شعاع م ا و نقطه ده را بر این سطح فرض میکنیم و م ده و ا ده را وصل میکنیم و زاویه م ا ده قائمه است پس فاصله م ده اطول باشد از م ا و بنابراین نقطه ده در خارج کره واقع شده این حکم کلی است در باب هر نقطه که بر سطح د ا ح فرض شود پس این سطح را با کره مشارکت

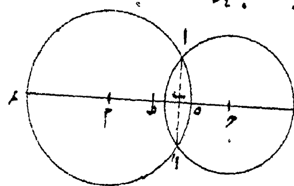
نیست جز در همان نقطهٔ ا پس مماس است بر سطحش (تعریف ۳)

بالعکس هرگاه سطح د ا ح مماس کره باشد عمود میشود بر طرف شعاع م ا که بنقطهٔ تماس وصل شود زیراکه چون نقطهٔ ه از این سطح را بمرکز وصل کنیم نظر بانکه نقطه خارج کره است م ه اطول میشود از شعاع م ا پس شعاع اقصر خطی باشد که بتوان از نقطهٔ م بسطح د ا ح وصل نمود وبنابراین عمود باشد بر این سطح

نتیجه - بر نقطهٔ مفروض از کره بیش از یک سطح مماس نتوان رسم نمود

قضیهٔ سیم ۳

فصل مشترک مابین دو کرهٔ متقاطعه دایره است و این دایره سطحش عمود باشد بر خط المرکزین و مرکزش واقع باشد بر این خط



برهان - بر خط م ح واصل مابین دو مرکز دو کره سطحی مرور دهید و آن قطع کند دو کره را بر دو دایرهٔ عظیمهٔ متقاطعه بر دو نقطهٔ ا و ا که قرینه‌اند نسبت بخط م ح

حال چون دو نصف دایره ا ه ا و ا ط ا را حول م ح دوران دهیم دو سطح کره بوجود آید و نقطهٔ ا بر خط فصل مشترکشان سیر کند و در این حرکت طول خط ا ب تغییر نکند و همواره عمود باشد بر م ح پس فصل مشترک دو کره دایره باشد بمرکز ب و بشعاع ا ب و سطحش عمود باشد بر م ح

تنبیه - بحسب آنکه دو دایرهٔ ه ا ا و ط ا ا متخارج باشند یا متداخل یا متماس داخل یا متماس خارج یا متقاطع اند دو کره متخارج باشند یا متداخل یا متماس داخل یا متماس خارج یا متقاطع پس در هر کدام از این اوضاع که دو کره نسبت بهمدیگر میگیرند همان روابطی که در وضع نظیرش از دو دایره مابین بعد المرکزین و دو شعاع دایره بود اینجا مابین بعد المرکزین و دو شعاع کره محقق است

تعریف ۱۴

۱- زاویه دو قوس عظیمه عبارت است از زاویه دو سطحی حادثه مابین دو سطحشان و اندو قوس ضلعین زاویه است و نقطه تلاقی رأسش

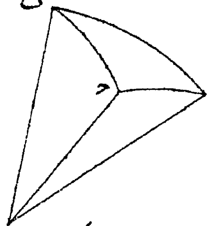
۲- مثلث کروی یا قوسی قطعه است از سطح کره محصور ما بین ۳ قوس عظیمه (کره را چون خواهیم منسوب کنیم باید کرکی گفت ولی معروف کرویت) وآن قوسها را اضلاع مثلث گوئیم و فرض اینست که هر کدام اقصر باشند از نصف دایره و زوایای حادثه ما بین آن قوسها را زوایای مثلث گوئیم

۳- مثلث کروی قائمة الزاویه باشد و متساوی الساقین و متساوی الاضلاع موافق همان تعریفی که درخصوص مثلث مستقیم الاضلاع ذکر شده

۴- کثیر الاضلاع کروی قطعه است از سطح کره محصور ما بین چند قوس عظیمه و ما اعتبار نکنیم جز محدبشان را یعنی آنها را که سطح هر ضلعی شان واقع شود در یکسمت تمام شکل

قضیهٔ چهارم ۴

دو مثلث کروی ا ب ح هر ضلع اقصر باشد از مجموع دو ضلع دیگر



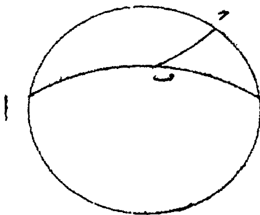
چون ه نقطه مرکز کره است واشعه ه ا و ه ب و ه ح را رسم میکنیم و سطوح ا ه ب و ا ه ح و ح ه ب را توهم میکنیم پس این سطوح بر نقطه ه زاویه مجسمه ترکیب کنند که مقیاس زوایای سطحیه اش

ا ه ب و ا ه ح و ح ه ب اضلاع ا ب و ا ح و ب ح باشند از مثلث کروی ا ب ح و چون در هر زاویه مجسمه هر زاویه سطحیه اش کوچکتر باشد از مجموع دو زاویه دیگر و ۲۳ و ۵ پس هر ضلع مثلث ا ب ح اقصر باشد از مجموع دو ضلع دیگر

قضیهٔ پنجم ۵

مجموع سه ضلع هر مثلث کروی اقصر باشد از محیط عظیمه

برهان - اب ج مثلث کرویست و دو ضلعش اب و اج را امتداد میدهیم تا نوبت دیگر بر نقطهٔ د متلاقی شوند پس دو قوس اب د و اج د هر کدام نصف عظیمه باشد چونکه دوایر عظام منصف بهمدیگرند (۱) و در مثلث ب ج د



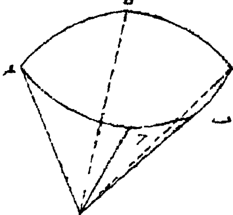
این نامساوات حاصل است ب ج < ب د + ج د (۴) و چون بر طرفین آش اب + اج اضافه کنیم چنین شود اب + اج + ب ج < اب د + اج د یعنی مجموع سه ضلع اقصر باشد از محیط عظیمه

تنبیه - شرط لازم و کافی در امکان ترسیم مثلث کروی با سه ضلع مفروض اینست که مجموع اضلاع عش اقصر باشد از محیط دایره و ضلع اطول کوچکتر باشد از مجموع دو ضلع دیگر زیرا که این شروط لازم باشند و کافی در امکان ترکیب زاویهٔ مجسمه از سه زاویهٔ سطحیه که مقیاسشان همان اضلاع مفروض باشد و پس از ترکیب این زاویه چون راسش را بر مرکز کره قرار دهیم اضلاعش مثلث مطلوب را از کره جدا میکنند

قضیهٔ ششم

مجموع اضلاع کثیرالاضلاع کروی محدب اقصر است از محیط عظیمه

برهان - اب ج د ه کثیرالاضلاع کروی محدب است و از مرکز م کره اشعهٔ م ا و م ب و م ج و م د و م ه را وصل میکنیم تا زاویهٔ مجسمهٔ محدبی ترکیب شود که مقیاس زوایای سطحیه اش ا م ب و ب م ج و غیره سهامی اب و ب ج و ج د و غیره اند و چون مجموع زوایای سطحیهٔ هر زاویهٔ مجسمه کمتر است از ۴ قائمه پس مجموع



قوسهای اب و ب ح وغیره اقصر باشند از محیط عظیمه

تعریف

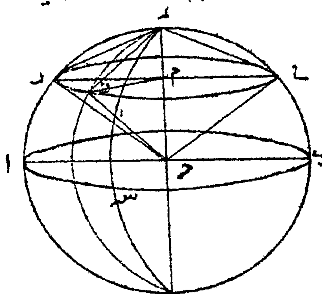
۱- قطب دایره مرسومه بر سطح کره طرف قطریست که عمود باشد بر سطح اندایره

۲- هر دایره کروی صاحب دو قطب است

۳- جمیع دوایریکه سطحشان متوازی باشند در قطبین مشارکند

قضیه هفتم

جمیع نقاط مفروضه بر محیط دایره کروی د ه ح بیك بعد باشند از قطب این دایره نقطه



برهان - چون از مرکز م دایره د ه ح اشعه م د و م ه و م ح را وصل کنیم و خطوط ند و نه و نح را رسم نمائیم مثلثات قائمه الزوایای ن م د و ن م ه و ن م ح متساوی باشند چون مشارکند در ضلع ن م و اضلاع م د و م ه و م ح نظر باینکه اشعه دایره اند متساوی هستند پس ند = نه = نح

پس قوسی دوایر عظام ند و نه و نح متساوی شوند چون اوتارشان متساوی شدند و سطوحشان عمود اند بر سطح دایره د ه ح زیرا که جمیعاً گذشته اند بر خط ن م که عمود است بر انسطح

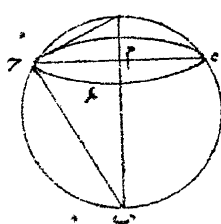
انچه ذکر شد بدایره عظیمه ا س و ب نیز تعلق گیرد ولی در انحالت چون زوایای قائمه ن م ا و ن م س و ن م ب برهرا از دوایر عظام ن م ا ه و ن م س ه وغیره واقع شده اند قوسی ن ا و ن س و ن ب هر کدام ربع دایره اند

شرح - بنابر خواص اقطاب میتوان بر صفحه کره هر قوس دایره بهمان سهولت رسم نمود که بر صفحه کاغذ رسم میشود و در انعمل پرکاری استعمال کنند معروف به پرکار کروی و ان چنانست که دو شعبه اش مفصل

و زانوی بقیه نموده اند تا بتوان دو نوکش را نسبت بهمدیگر مائل نمود
و ظاهر است که چون نوکی از این پرکار را بر د قرار دهیم و نوک دیگر را بر ر و دوران دهیم حول
نقطه د طرف ر دایره رهح را رسم کند
و چون خواهیم از قطب د دایره عظیمه اح ب را رسم کنیم باید فاصله مابین دو نوک پرکار را
برابر بگیریم با وتر ربع محیط و در تعیین این بعد باید شعاع کره معلوم باشد و اکنون این مسئله را حل کنیم

قضیه هشتم ۸ مسئله

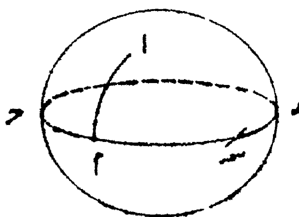
کرهٔ داده شده است میخواهیم شعاعش را معلوم کنیم



بفتحه اختیاری مثل اح دایره حده را
بر صفحه کره رسم کنید و سه نقطه ح و د و ه را
بر ان دایره نشان کنید و با پرکار ابعاد مستقیم حد
ده و حه را بگیرید و بر صفحه کاغذ با این سه
ضلع مثلثی رسم نمائید و شعاع دایره محیطه بر آن مثلث بعینه شعاع دایره حده باشد
و بعد بوهم بر قطر اب کره دایره عظیمه احب ه را مرور دهید و خطوط حا و حب
و حم را وصل نمائید انوقت ظاهر است که از مثلث قائم الزاویه موهوم حام وتر اح و ضلع حم
معلوم است پس میتوان بر صفحه کاغذ مثلث ح'ا'م' را مساوی حام رسم نمود و چون خط حب
در کره عمود است بر حا پس اگر عمود ح'ب' را بر ح'ا' رسم کنیم و امتداد دهیم تا امتداد ا'م' را ملاقات
کند خط ا'ب' برابر میشود با قطر اب کره

قضیه نهم ۹ مسئله

بر صفحه کرهٔ دو نقطه اوب فرض شده میخواهیم دایره عظیمه بر انها مرور دهیم
این دو نقطه را دو قطب فرض نموده و نائد و مرکز بشعاعی برابر وتر ربع محیط عظیمه دو دایره رسم



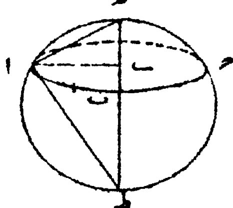
میکنیم تا بر نقطه د متقاطع شوند و این نقطه قطب قوس
عظیمه اب باشد و از مرکز قوس مطلوب را رسم میکنیم

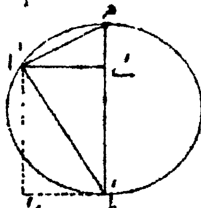
قضیه چهاردهم مسئله

میخواهیم از نقطه ا مفروضه بر صفحه کره ذات عظیمه فرود آوریم عمودی بر عظیمه دیگر
از قطب و شعاعی برابر وتر ربع محیط قوسی رسم کنید تا
دایره مفروضه حمد را بر نقطه سه قطع کند و بعد از
قطب سه و بشعاع سه ا قوس عظیمه ام را
رسم کنید که عمود باشد بر حمد ف

قضیه یازدهم مسئله

سه نقطه ا و ب و ج بر صفحه کره فرض شده میخواهیم دایره صغیره برآنها مرور دهیم





با پرکار کروی سه فاصله اب
و بج و اج را بگیرید و بر صفحه کاغذ
با این سه ضلع مثلثی رسم نمائید و
دایره بر آن محیط کنید شعاع
این دایره برابر شعاع دایره ایست که میخواهیم بر صفحه کره رسم کنیم
حال بوهم قطر ه ط را عمود میکنیم بر سطح دایره ابج و آن سطح این دایره را قطع کند بر مرکز
ت و خطوط اه و ات و اط را وصل میکنیم پس ظاهر است که مثلث هاط قائم الزاویه است
برا و از اجزایش وتر هط و ارتفاع ات معلومست
و در ترسیم این مثلث بر صفحه کاغذ دایره رسم کنیم که قطرش ه‌ط مساوی باشد با قطر کره و بر نقطه
ط خطی مماس میکنیم بطول شعاع دایره ابج و خط ط‌ا را بموازات ه‌ط رسم میکنیم تا

دایره را بر ا قطع کند د و خط اه و اط را وصل میکنیم پس اوط مثلث مطلوب است وضلع اد برابر اه

و در تعین قطب ه از دایره اب ج از اقطاب ا و ب و د و بشعاع اد سه قوس رسم کنیم تا بر نقطه مطلوبه متقاطع شوند و چون قطب بدست آمد ما بقی عمل اشکال ندارد

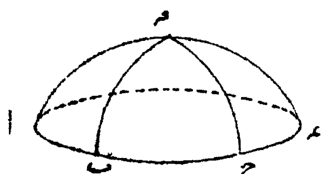
قضیهٔ دوازدهم

در سطح کره اقصر فاصله ما بین دو نقطه ا و ب قوسی است از دایرهٔ عظیمه کمتر از نصف محیط واصل ما بین اند و نقطه

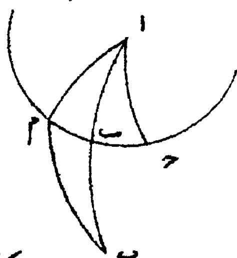
برهان - این قضیه مبتنی است بر دو مقدمه

اول - اقصر فاصله قطب ه از جمیع نقاط محیط ا ب د یکیست

ظاهر است که این حکم لازمه متساوی قسی دوایر عظام دا و ه ب .... است و لازمه تقارن تامی که کره حول نقطه ه دارد



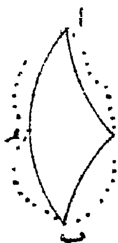
دوم - اب و اج دو قوس عظیمه اند هر کدام کمتر از نصف محیط و فرض اینست که اج > اب پس گوئیم که اقصر فاصله ما بین ا و ج کوتاه تر است از اقصر فاصله ما بین ا و ب



برهان - از قطب ا و بشعاع اج دایره رسم کنیم و آن البته قطع کند قوس اب را بر نقطهٔ واقع ما بین ا و ب و اقصر فاصله ما بین ا و ب را ام ب فرض میکنیم این خط قطع کند دایره ج -- را بر نقطه م و خط ام اقصر فاصله باشد ما بین ا و م چونکه اگر ما بین این دو نقطه خطی دیگر اقصر

بود پس ام ب اقصر فاصله نمی‌شد مابین ا و ب و این خلاف فرض است و بنا بر مقدمه سابقه اقصر فاصله مابین ا و م برابر باشد با اقصر فاصله مابین ا و ح پس اقصر فاصله ا از ح کوتاه‌تر است از اقصر فاصله همان نقطه ا از ب فهو المطلوب

بعد از آن مقدمه اب قوسی است از دایره عظیمه کوتاه‌تر از نصف محیط و آن مابین ح و نقطه ا و ب و فرض می‌کنیم که خارج این قوس واقع باشد نقطه از اقصر فاصله مابین ا و ب و آن نقطه ح است و دو قوس عظیمه اح و ب ح را رسم می‌کنیم و اد را مساوی اح جدا می‌کنیم آن وقت ف ۴ اب < اح + ح ب و چون از طرفین موضوع کنیم اد = اح را باقی میماند د ب < ب ح



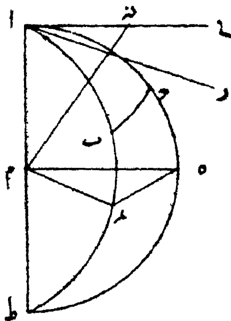
و بنا بر مقدمهٔ اول اقصر فاصله ا از د مساوی است با اقصر فاصله ا از ح و چون نقطه ح متعلق است بخط اقصر فاصله مابین ا و ب لازم آید که فاصله ح از ب اقصر باشد از فاصله د از ب و این نتیجه بنا بر مقدمهٔ دویم محال است چونکه قوس ب ح اقصر است از ب د پس هیچ نقطه از خط اقصر فاصله مابین ا و ب نتواند خارج قوس اب واقع شود پس خود این قوس اقصر فاصله باشد مابین طرفین ا و ب

تنبیه — در برهان مذکور هر کدام از دو قوس اح و ب ح را اقصر از اب فرض نمودیم و ظاهر است که غیر از این نتوان فرض نمود زیرا که اگر اح > اب میبود خط اقصر فاصله مابین ا و ب کوتاه‌تر میشد از اقصر فاصله مابین ا و ح پس نقطه ح ممکن نبود متعلق باشد بخط اول

قضیهٔ سیزدهم ۱۳

مقیاس زاویه ب اح حادثه مابین دو قوس عظیمه اب و اح زاویه داخ است حادثه مابین دو خط مماس بر نقطه ا از اند و قوس ح ر مقیاسش قوس عظیمه ده است مرسوم از قطب ا مابین دو ضلع اب و اح که وقت ضرورت امتداد

داده میشوند

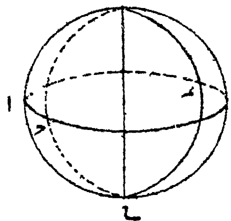


برهان - خط مماس اد مرسوم در سطح قوس اب عمود باشد بر طرف شعاع ام وخط مماس اح مرسوم درسطح قوس اح عمود باشد برطرف همان شعاع ام پس زاویه داح مساوی باشد بازاویه حادثه مابین دوسطح م اب و م اح وازاویه دوقوس اب و اح باشد که بسه حرف ب اد نموده شود

بکذا اگر ده قوس اد و اه هرکدام ربع محیط باشند دو خط م د و م ه عمود شوند بر م ا وزاویه د م ه مساوی شود بازاویه دوسطح ام د و ام ه پس قوس ده مقیاس زاویه اند دوسطح باشد یا مقیاس زاویه حاب

نتیجه - زوایای مثلثات کروی امیتوان بهمدیگر سنجید از روی قسی دوایر عظامیکه از روی شان بحکم اقطاب مابین اضلاع شان رسم شود وازینقرار میتوان در سطح کره زاویه مساوی زاویه دیگر رسم نمود

شرح - هر دو زاویه متقابله برأس مثل اده و بدح مساوی میباشند چونکه هر دو حادث شده اند از تقاطع دو سطح ابح و دهح



ونیز ظاهراست که در تقاطع دو قوس اح ب و دهح دو زاویه مجاوره اده و دهب مجموعاً معادلست با دو قائمه

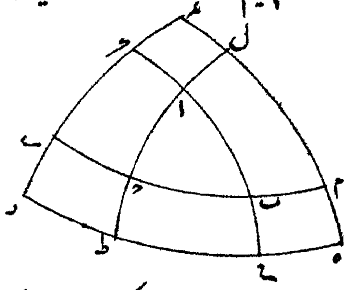
تعریف

در مثلث کروی ابح چون از اقطاب ا و ب و ح قسی دوایر عظام ه د و د ه و ده را رسم کنیم تا متقاطع شوند مثلث جدید ده ه را مثلث قطبی ابح کوییم ودر اش نظرا نقطه تلاقی اند دو قوس است که از دو قطب ب و ح رسم شده اند بلی این دو

قوس بر دو نقطه متقاطع شوند ولی باید آن نقطه را اختیار نمود که با نقطه ا در یک سمت بج
افتاده باشد و بهمین وجه نظایر دو راس دیگر را تشخیص دهیم

قضیه چهاردهم

هرگاه قطبی مثلث ا ب ج مثلث د ه و باشد گوییم بعکس مثلث ا ب ج نیز قطبی د ه و راست



برهان ـ چون نقطه ا قطب قوس ه و است فاصله ا ه ربع محیط است و چون نقطه ج قطب قوس د ه است فاصله ج ه نیز ربع محیط است پس فاصله نقطه ه از هر دو نقطه ا و ج ربع محیط شد پس این نقطه قطب باشد قوس ا ج را و علاوه بر آن هر دو نسبت به ا ج در یک سمتش واقع
و بهمین وجه ثابت میشود که د قطب است قوس ب ج را و و قطب است قوس ا ب را پس ا ب ج مثلث قطبی شد د ه و را

قضیه پانزدهم

در دو مثلث قطبی ا ب ج و د ه و مقیاس هر زاویه یکی از آن دو مثلث نصف محیط است منهای ضلع مقابلش از مثلث دیگر

برهان ـ دو ضلع ا ب و ا ج را امتداد دهیم تا ه و را بر دو نقطه ح و ط تلاقی کنند و چون نقطه ا قطب است قوس ح ط را مقیاس زاویه ا قوس ح ط باشد و چون نقطه ه قطب ا ط است و نقطه و قطب ا ح دو قوس ه ط و و ح هر کدام ربع محیط باشند پس ه ط + و ح و نصف محیط باشد و چون مقدار مذکور مساویست با ه و + ح ط پس قوس ح ط مقیاس زاویه ا مساویست با نصف محیط منهای ضلع ه و و بهمان دلیل

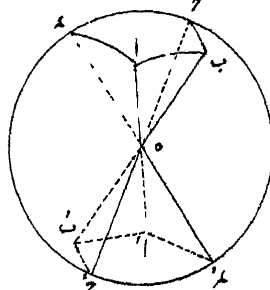
مقیاس زاویه ب نصف محیط است منهای مد و مقیاس زاویه ح نصف محیط است منهای مه

این حکم در دو مثلث قطبی اصل و عکس است چونکه این دو مثلث یکو چاز روی همدیگر رسم شوند و از انیقرار در مثلث مده مقیاس زوایای مد و ه و د باید بوده باشند ترتیب ½ محیط - بح و ½ محیط - اح و ½ محیط - اب زیرا که مثلا زاویه مد مقیاسش قوس م ب است و چون م ب + بح = مح + ب ب = ½ محیط پس قوس م ب مقیاس زاویه مد = ½ محیط - بح و همچنین در سایر زوایا

شرح - چون از مرکز کره اشعه وصل نمائیم بر روس دو مثلث اب ح و مده دو زاویه سه سطحی ترکیب شود که مقیاس زوایای سطحیشان اضلاع دو مثلث کروی باشند و زوایای دو سطحیشان بعینه زوایای همان دو مثلث باشند

و بنا بر حکم مذکور در این دو زاویه سه سطحی زوایای دو سطحی هر کدام مکمل سطوح دیگر باشند و بالعکس پس اینده زاویه سه سطحی مکمل همدیگر باشند

تعریف



اب حمد کثیر الاضلاع است کروی و از مرکز کره اشعه بر روسش وصل میکنیم تا از طرف دیگر کره را قطع کنند بر نقاط اُ و بُ و حُ و مُدُ را وصل میکنیم دو زاویه مجسمه حادثه بر مرکز ه قرینه هم باشند

و بنا بر این زوایای سطحیه و زوایای دو سطحیشان متساوی باشند پس دو کثیر الاضلاع کروی ابحمد و اُبُ حُمُدُ نیز در جمیع اجزا متساوی باشند و با وجود آن بر همدیگر منطبق نشوند زیرا که چون ضلع حُمُدُ را بر مساویش حمد نقل کنیم چنانچه سایر اضلاع دو شکل در یکسمت حد افتد

وباالجمله قوس اُبُ و بُ و اندوحند م

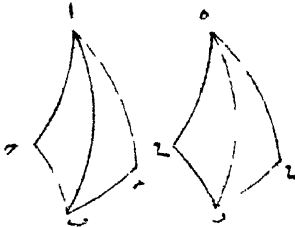
نقصه

نقطهٔ د بر ح واقع میشود و چون ابتدا از ح دو کثیر الاضلاع را دیگبه بپیمائیم می بینیم که
اضلاع و زوایا بعکس ترتیب واقع میشوند

چنین دو کثیر الاضلاع را قرینه یکدیگر گوئیم بهر وضع در روی کره نسبت بهمدیگر واقع شوند

قضیهٔ شانزدهم ۱۶

دو مثلث واقع بر یک کره یا بر دو کره متساویه هرگاه دو ضلع و زاویه بینهما شان
نظیر بنظیر متساوی باشد سایر اجزایشان متساوی میشوند



برهان - فرض میکنیم ضلع اب = ده و ضلع اح
= دح و زاویه باح = هدح پس بدلیل انطباق
مثلث هدح را میتوان بر مثلث ابح نقل نمود
همانطورکه بر هم منطبق گردید دو مثلث مستقیمة الاضلاع
که دو ضلع و زاویه بینهما شان متساوی بود پس جمیع اجزای مثلث هدح مساوی شود با جمیع
اجزای مثلث ابح یعنی علاوه بر ۳ جزئیکه متساوی فرض شده پس این اجزا نیز متساوی شوند
بح = هح و زاویه ابح = دهح و زاویه احب = دحه

هرگاه اضلاع متساویه دو مثلث نسبت بدو زاویه متساویه متناظر نباشد و بعکس ترتیب باشد
آنوقت مثلث هدح را نقل کنیم بر قرینه ابح و باز حکم مبرهن شود

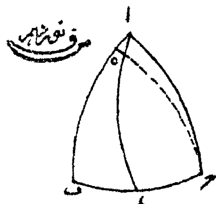
قضیهٔ هفدهم ۱۷

دو مثلث واقع بر یک کره یا بر دو کره متساویه هرگاه دو زاویه و ضلع بینهما شان
متساوی باشد سایر اجزاشان متساوی میشوند

برهان - یکی از آندو مثلث را نقل میکنیم بر دیگری یا بر قرینه دیگر همچنانچه در دو مثلث مستقیمة
الاضلاع تعمیل را اجرا می نمودیم و ۷ را

قضیهٔ هیجدهم ۱۸

دو مثلث واقع بر یک کره یا بر دو کرهٔ متساویه هرگاه اضلاعشان متساوی باشد زوایاشان نیز متساوی شوند هر دو زاویهٔ متساویه مقابل باشند بدو ضلع متساوی



برهان ـ مرکز کره را بر رؤس دو مثلث وصل میکنیم تا دو زاویهٔ سه سطحی حاصل شود که مقیاس زوایای سطحیشان اضلاع دو مثلث کرویست پس این سطوح نظیر بنظیر متساوی باشند و لوقت زوایای دو سطحی مقابل باضلاع متساویه متساوی شوند و این زوایا بعینها زوایای دو مثلث اند

قضیهٔ نوزدهم

در هر مثلث کروی متساوی الساقین دو زاویهٔ مقابله بدو ضلع متساوی متساوی شوند

برهان ـ فرض میکنیم اب = اج و میگوئیم زاویه ج = ب زیرا که چون قوس اد را از رأس ا بر وسط قاعده وصل کنیم در دو مثلث ابد و ادج اضلاع متساوی شوند زیرا اد مشترکست و بد = دج و اب = اج پس بحکم قضیهٔ سابقه زوایا متساوی گردند یعنی ب = ج

و ضمنا ثابت شد که زاویه باد = داج و زاویه بدا = جدا پس دو زاویه حین قائمه اند پس قوس مرسوم از رأس مثلث کروی متساوی الساقین بر وسط قاعده اش عمود شود بر این قاعده و نصف کند زاویهٔ رأس مثلث را

شرح ـ از این قضیه نیز نتیجه شود که قرینهٔ مثلث کروی متساوی الساقین مساوی وی است بطور انطباق

قضیهٔ بیستم ۲۰

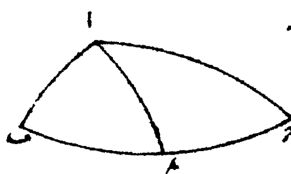
در مثلث کروی هرگاه دو زاویه متساوی باشند دو ضلع مقابل بآنها نیز متساوی گردند

برهان ـ در شکل سابق فرض میکنیم زاویه ب = ج و میگوئیم اج = اب و الّا اب بزرگتر باشد

و ب ه را مساوی د ا جدا میکنیم و قوس ه ح را وصل میکنیم حال دو ضلع ب ه و ب ح
از مثلث ه ب ح مساویست با دو ضلع ا ح و ب د از مثلث ا ب ح و زاویه ه ب ح
حادثه مابین دو ضلع اول مساوی باشند با زاویه ا ح ب حادثه مابین دو ضلع دویم پس این دو
مثلث مساوی باشند و زاویه ه ح ب = ا ب ح ولی بفرض زاویه ا ح ب مساوی بود با ا ب ح
پس ه ح ب = ا ح ب و این محالست پس ا ب و ا ح مقابل با دو زاویه متساویه ب و ح متساوی

قضیه بیست و یکم [۲۱]

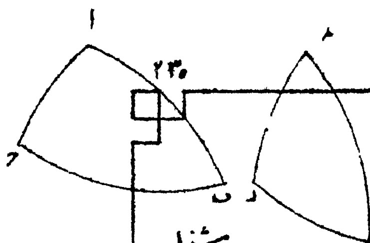
در مثلث کروی ا ب ح هرگاه زاویه ا اعظم باشد از زاویه ب ضلع ب ح
مقابل بزاویه ا اطول شود از ضلع ا ح مقابل بزاویه ب و بالعکس اگر ضلع
ب ح اطول باشد از ح ا زاویه ا اعظم باشد از زاویه ب



برهان - اولا فرض میکنیم زاویه ا اعظم باشد از ب و زاویه
ب ا د را مساوی ب جدا میکنیم پس ا د = د ب (۲۰) ولی
ا د + د ح اطول است از ا ح پس بجای ا د مساویش
د ب را قرار میدهیم فوقت د ب + د ح یا ب ح > ا ح
ثانیا - فرض میکنیم ب ح > ا ح و میگوئیم زاویه ب ا ح اعظم است از ا ب ح چونکه اگر مساوی باشد
لازم می آید که ب ح = ا ح و اگر کوچکتر باشد بنا برآنچه اکنون بثبوت رسید ب ح < ا ح و این
خلاف فرض است پس زاویه ب ا ح بزرگتر است از ا ب ح

قضیه بیست و دوم [۲۲]

هرگاه در یک کره یا دو کره متساوی دو ضلع ا ب و ا ح از مثلث ا ب ح
مساوی باشند با دو ضلع د ه و د ر از مثلث د ه ر و زاویه ا اعظم باشد
از د ضلع سیم ب ح از مثلث اول اطول میشود از ضلع ه ر از مثلث دویم



برهان الحکم بعینه همانست که ذکر شده است در ق ۱۱ را

قضیهٔ بیست و سیم ۲۳

هرگاه در یک کره یا دو کرهٔ متساویه دو مثلث زوایاشان متساوی باشند پس اضلاعشان نیز متساوی میشوند

برهان - دو مثلث مفروض ح و د باشد و دو قطبی آنها ه و ط و چون در دو مثلث اول زوایا متساوی فرض شدند اضلاع دو قطبی ه و ط متساوی گردند ق ۱۵ و در این دو مثلث چون اضلاع متساوی شدند زوایاشان متساوی گردند ق ۱۸ و چون زوایای این مثلث متساوی گشتند اضلاع دو قطبی آنها ح و د متساوی گردند ق ۱۵ پس دو مثلث متساویة الزوایای ح و د متساویة الاضلاع نیز گشتند

شرح - الحکم در مثلثات مستقیمة الاضلاع بتحقیق پیوست یعنی از تساوی زوایاشان همین تناسب اضلاع لازم آمد ولی عنوان تحت این معنی را دریافت و سبب این اختلاف ما بین زوایای مستقیمة الاضلاع و کروی را معلوم کرد در قضیهٔ حالیه و در قضایای ۱۶ و ۱۲ و ۱۸ و ۲۲ که بحث از مقایسهٔ مثلثات بود مخصوصاً قید شد که این مثلثات مرسوم باشند بر صفحهٔ یک کره یا دو کرهٔ متساویه و چون قسمی متشابهه متناسبند بنسبت اشعه پس در کرات متساویه چون مثلثات متشابه گشتند ناچار متساوی نیز باشند پس عجب نیست که از تساوی زوایا تساوی اضلاع لازم آید

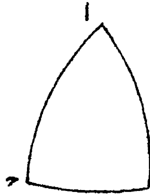
ولی اگر مثلثات بر کرات مختلفه رسم شوند حکم چنین نباشد تو فقط بر فرض تساوی زوایا مثلثات متشابه گردند و اضلاع متناسب گردند بر نسبت اشعهٔ کرات

قضیهٔ بیست و چهارم ۲۴

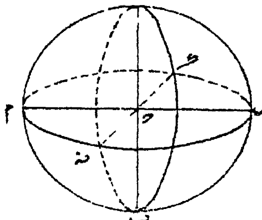
اوّلاً مجموع زوایای هر مثلث کروی اصغر باشد از ۶ قائمه و اعظم از ۲ قائمه

ثانیاً - چون بر اصغر شان دو قائمه اضافه کنیم حاصل اعظم باشد از مجموع دو زاویه دیگر

برهان - اولاً چون مقیاس هر زاویه مثلث کروی مساوی است بنصف محیط منهای ضلع مقابلش از مثلث قطبی ف ۵ ا پس مقیاس مجموع سه زاویه مثلث مساوی باشد با سه نصف محیط منهای مجموع اضلاع مثلث قطبی اش و چون مجموع ثانی اقصر است از یک محیط پس بعد از وضعش از سه نصف محیط باقی اقصر میشود از سه نصف محیط و اول از یک نصف محیط پس مجموع زوایای مثلث اصغر باشد از ۶ قائمه و اعظم از ۲ قائمه



نتیجه - مثلث کروی ممکن است دارای دو یا سه زاویه قائمه یا منفرجه باشد پس اگر مثلث اب ح دو زاویه اش ب و ح قائمه باشند را قطب باشد قاعده ب ح را و آنوقت دو ضلع اب و اح هر کدام ربع محیط شوند و اگر علاوه بر آن زاویه ا قائمه باشد مثلث اب ح جمیع زوایایش قائمه میشوند و اضلاعش هر کدام ربع محیط و سطح چنین مثلث ثمن سطح کره میشود و این حکم از روی شکل ظاهر است و قوس د ربع محیط است



ثانیاً - ح و د و ه سه زاویه مثلث آ و ح کوچکتر از سایر فرض شده پس ۱۸۰ - ح و ۱۸۰ - د و ۱۸۰ - ه اضلاع مثلث قطبی اش باشند و این نامساوات حاصل شود

$$۱۸۰ - ح < ۱۸۰ - د + ۱۸۰ - ه$$

و چون بر طرفینش ح + د + ه اضافه کنیم و ۱۸۰ بکاهیم این نامساوی حاصل شود

$$د + ه < ۱۸۰ + ح$$

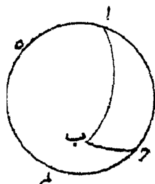
با سه زاویه ح و د و ه که بر وفق دو شرط مذکور باشند میتوان مثلثی کروی رسم نمود که

که خط این دو شرط لازم باشد و کافی در رسم زاویهٔ سطحی از روی زوایای دو سطحی ح و ه و ه

شرح — آنچه تاکنون ذکر شد براین فرض بود که اضلاع مثلث کروی هر کدام قصر باشد از نصف محیط ولی مثلثاتی هست که بعضی اضلاعشان اطول باشد از نصف محیط و بعضی زوایاشان اعظم از دو قائمه زیرا که چون ضلع اح را امتداد دهیم تا دایره اح ه تمام شود آنچه بعد از وضع مثلث اب ح از نصف کره باقی ماند مثلث تازه است که بازبه حرف اب ح نموده شود ولی اضلاع اب است و ب ح و اه ح پس ظاهر است که ضلع اه ح اطول باشد از نصف محیط

اه ح وزاویه مقابله اش ب اعظم از دو قائمه بمقدار ح ب ه

ونکته آنکه از تعریف خارج نمودیم مثلثاتی را که اضلاع و زوایاشان بیقدر بزرگ باشد این است که راه حل و تعین اجزاشان منجر میشود بحل مثلثاتیکه تعریف در آنها صدق کنند زیرا که چون زوایا و اضلاع مثلث اب ح معلوم شد ظاهر است که ضمناً معلوم شود اجزای مثلثی که بهمان نام باشد و باقی نصف کره باشد بعد از وضع مثلث



تعریف

قاچ قطعه است از سطح کره واقعه مابین دو نصف دایره عظیمه که منتهی باشند بنقطهٔ مشترک

٢- اکلیل کروی قطعه ایست از حجم کره که واقع شده مابین دو نصف دایره و قاچ مذکور را قاعده آن نامند

٣- هرم کروی قطعه است از حجم کره که واقع باشد مابین سطوح زاویه مجسمه و راسش بر مرکز کره باشد و قاعده اش کثیر الاضلاع کروی که محصور باشد مابین آن سطوح

و چون دو کثیر الاضلاع کروی بر یکدیگر منطبق شوند دو هرم مبنی بر آنها و قاعده نیز توانند بر هم منطبق شوند

٤- دو هرم کروی را قرینه گوئیم هرگاه دو کثیر الاضلاع قاعده آنها قرینه هم باشند

قضیهٔ بیست و نهم

نسبت تاج ام ب دا بسطح کره مثل زاویه م ا د باشد از این تاج بچهار زاویه قائمه
و یا مثل قوس م د مقیاس از زاویه باشد بمحیط عظیمه

برهان — در شکل سابق فرض میکنیم قوس م د را نسبت منطق با محیط م د ل ک باشد
چون محیط را بر ۴۸ جزء متساوی قسمت کنیم قوس شامل پنج عدد از آن اجزاء شود پس
نسبت قوس م د بمحیط ۵/۴۸ باشد

حال سطوحی چند بر قطر اب و بر نقاط تقسیم میگذرانیم تا سطح کره بر ۴۸ تاج قسمت شود
و همه متساوی باشند چون زوایای شان متساویست و ظاهر است که پنج عدد از این تاجها در ام ب د
بگنجد پس نسبت این تاج بسطح کره نیز ۵/۴۸ باشد و بنابراین بر نسبت قوس م د باشد بمحیط م د ل ک
و اگر قوس م د را نسبت منطق با محیط نباشد میتوان بمثل آنچه سابق در مقام خود
ذکر شده باز مبرهن نمود که نسبت تاج بسطح کره مثل قوس م د باشد بمحیط

در مقیاس و مساحت تاج

فرض میکنیم د و د′ دو تاج باشند و ه و ه′ دو زاویه آنها پس بحکم مذکور

د : سطح کره = ه : ۴ قائمه

و نیز　د′ : سطح کره = ه′ : ۴ قائمه

پس　د : د′ = ه : ه′　(۱)

پس چون خواهیم تاجی را مساحت کنیم با یکه بسنجیمش بتاج دیگر که واحد فرض شده باشد از روی
تناسب مذکور ظاهر شد که کافی است نسبت زاویه اش را بزاویه تاج واحد معلوم کنیم
فرض میکنیم د′ واحد تاج زاویه اش قائمه باشد پس تناسب (۱) چنین میشود

د/۱ = ه/قائمه　(۲)

و بنابراین نسبت تاج مفروض بتاج قائم مساوی شد با نسبت زاویه اش بزاویه قائمه و این

معنی را بعبارت اداکنیم که مقیاس هر قاچ زاویهٔ اوست

وچون مثلث م را که هر سه زاویه اش قائمه باشد واحد سطح فرض کنیم و آن نصف قاچ قائمه است

و در تساوی (۲) بجای ق قرار دهیم ۲ م را چنین شود

$$\frac{ق}{۲م} = \frac{ق}{۱ قائمه}$$

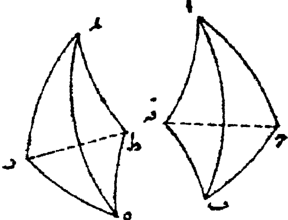
وچون طرفین را در دو ضرب کنیم چنین شود

$$\frac{ق}{م} = \frac{۲ق}{۱ قائمه}$$

پس نسبت قاچ مفروض بمثلث سه قائمه مساویست بنسبت مضاعف زاویه اش بزاویه قائمه

وبعبارت اخری مقیاس هر قاچ مضاعف زاویهٔ اوست

شرح - بهمین وجه ثابت میشود که نسبت اکلیل بجسم کره مثل زاویهٔ اوست بچهار قائمه و نیز مقیاس حجم اکلیل زاویهٔ اوست بنابرآنکه واحد حجم اکلیل قائم باشد و واحد زاویه زاویهٔ قائمه یا آنکه مقیاسش مضاعف زاویهٔ اوست بنابرآنکه واحد حجم هرم مثلث القاعده سه قائمه باشد و آن نصف اکلیل قائم است و واحد زاویه زاویهٔ قائمه



قضیهٔ بیست و ششم

دو مثلث کروی قرینه بحسب مساحت متساوی باشند

برهان - اب ج و د ه ز دو مثلث قرینه است و اضلاعشان باین ترتیب متساوی باشند اب = د ه و اج = د ز و ج ب = ز ه ولی برهم منطبق نشوند

وگوئیم سطح اب ج = د ه ز

نقطه ق قطب دایره صغیره باشد مرور کنند بر سه نقطه ا و ب و ج (دایره که بر این سه نقطه مرور کند ومحیط شود بر مثلث اب ج حکماً صغیره کره است زیرا که اگر عظیمه میبود هر سه ضلع اب و ب ج و اج در یک سطح واقع میشدند و آنوقت مثلث اب ج مبدل میشد بیکی از اضلاع خود) و از آن

نقطه

نقطه قوسهای متساوی ه ا و قه ب و قه ج را وصل نمایند و بر نقطه د زاویه ه د ط را مساوی ا ج قه رسم کنند و قوس د ط را مساوی ج قه جدا نمایند و دو قوس ه ط و ه ط را وصل کنند

پس در دو مثلث ه د ط و ا ج قه دو ضلع ه د و د ط و زاویه ه د ط مساوی است با دو ضلع ا ج و ج قه و زاویه ا ج قه و سایر اجزای متساوی شوند (ع ۱) پس ضلع ه ط = ا قه و زاویه ه ط د = ا قه ج

و در دو مثلث مفروض ه د ه و ا ج ب چون دو زاویه ه د ه و ا ج ب مقابل به دو ضلع متساوی ه ه و ا ب متساوی هستند بعد از وضع دو زاویه متساویه ه د ط و ا ج قه باقی مانند زاویه ط د ه = قه ج ب و از خارج دو ضلع ط د و د ه مساوی هست با دو ضلع قه ج و ج ب پس دو مثلث د ط ه و ج قه ب سایر اجزاشان متساوی شود ضلع ط ه = قه ب و زاویه د ط ه = ج قه ب

حال چون ملاحظه کنیم که دو مثلث ه د ط و ا ج قه که اضلاعشان نظیر بنظیر متساوی شدند متساوی الساقین اند معلوم میشود که میتوان یکی را بر دیگر منطبق نمود پس متساوی شوند سطح ه ط د = ا قه ج و بهمین دلیل سطح د ط ه = ج قه ب و سطح ه ط ه = ا قه ب پس

ه ط د + د ط ه − ه ط ه = ا قه ج + ج قه ب − ا قه ب یا ه د ه = ا ج ب پس دو مثلث قرینه بحسب وسعت متساوی شدند

شرح ۱ـ ممکن است دو قطب ه و ط در درون دو مثلث ا ب ج و ه د ه واقع شوند در اینصورت باید سه مثلث ه ط د و د ط ه و ه ط ه را با هم افزود تا مثلث ه ه د ترکیب شود بکذا سه مثلث ا قه ج و ج قه ب و ا قه ب را برای ترکیب ا ب ج ولی دلیل بعینه برجا است

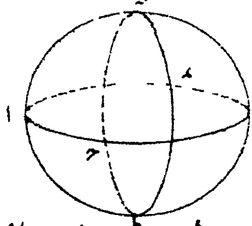
۲ـ بهمین وجه ثابت میشود تعادل حجم دو هرم کروی قرینه

قضیه بیست و هفتم (۲۷)

حجم دو دایره

چون دو دایرهٔ عظیمه اوب و حوه د در نصف کره ادحب متقاطع شوند مجموع دو مثلث متقابل اوه و ب وه مساوی شود با تاج که زاویه اش ب وه باشد

برهان - چون دو قوس وب و وه را در نصف دیگر کره امتداد دهیم تا متلاقی شوند بر نقطه ط قوس ه ب ط نصف دایره شود و همچنین قوس اوب و چون از طرفین قوس وب را وضع کنیم باقی ماند ب ط = اوه و بهمین دلیل



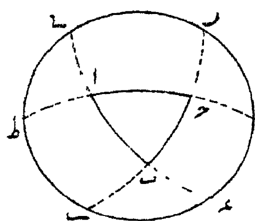
ه ط = حوه و ب ه = اح پس دو مثلث اوح و ب ه ط اضلاعشان متساوی شوند و چون وضعشان قرینه است بحسب وسعت متساوی گردند و ۲ و مجموع دو مثلث اوح و ب وه معادل شود با تاج وب ط ه وه که بر زاویه ب وه است

شرح - بهمین وجه ثابت میشود که دو هرم کروی که بر دو قاعده مثلث اوح و ب وه باشند مجموعشان معادل شوند با اکلیل کروی که بر زاویه ب وه باشد

قضیهٔ بیست و هشتم

مقیاس سطح هر مثلث کروی فضل مجموع سه زاویه او است بر دو زاویه قائمه

برهان - مثلث مفروض اب ح است و اضلاعش را امتداد میدهیم تا تلاقی کنند دایره عظیمه مثل ه د ی ح را که در خارج مثلث فرض شده پس بر مقتضای قضیه سابقه



اده + اح ط = تاج ا

ب ح ی + ب ه د = تاج ب

ح ط + ح د ه = تاج ح

چون این سه متساوی را باهم جمع کنیم و ملاحظه نمائیم که مجموع شش مثلث از نصف کره تجاوز

نموده و فضاش را بمقدار مضاعف مثلث اب ح است این تساوی نتیجه میشود

۲ ۰ اب ح + ۱/۲ کره = قاج ا + قاج ب + قاج ح

پس بعد از وضع نصف کره از طرفین و تقسیم تساوی به ۲ حسن میشود

اب ح = (قاج ا + قاج ب + قاج ح − ۱/۲ کره) / ۲

و سابق ذکر شد که چون مثلث سه قائمه را واحد مساحت فرض کنیم و زاویه قائمه را واحد زاویه مقیاس قاج مضاعف زاویه اوست و نصف کره چون حکم قاجی دارد که زاویه اش ۲ قائمه باشد مقیاسش ۴ قائمه میشود پس

مقیاس اب ح = (۲ا + ۲ب + ۲ح − ۴) / ۲ = ا + ب + ح − ۲ قائمه

شرح ۱ـ هرگاه زوایای مثلث معلوم باشد بحسب درجات فقط مقیاسهای خود آنها را در وقت برای تعین مقیاس مثلث باید از مجموع اندرجات موضوع کرد ۱۸۰ درجه و نسبت باقی را به ۹۰ معلوم کرد مثال فرض میکنیم ا = ۷۰ درجه ۱۰ دقیقه ب = ۶۰ درجه ۲۰ دقیقه ح = ۸۰ درجه چون از این مجموع ۱۸۰ درجه تفریق کنیم باقی ماند ۳۰ درجه ۳۰ دقیقه و برای تعین نسبت این عدد به ۹۰ درجه باید هر دو را بدقایق تحویل نمود و عدد اول را بر ثانی قسمت کرد پس چنین نتیجه شود که نسبت مثلث مفروض بمثلث سه قائمه است ۱۸۰۰/۵۴۰۰ یعنی ثلث

شرح ۲ـ بهمین وجه ثابت میشود که مقیاس هرم کروی مثلث القاعده فضل مجموع سه زاویه قاعده او است بر دو زاویه قائمه (بنابر آنکه واحد حجم هرم سه قائمه باشد و واحد زاویه زاویه قائمه)

قضیه بیست و نهم ۲۹

مقیاس مساحت کثیر الاضلاع کروی فضل مجموع زوایای او است بر حاصل ضرب دو زاویه قائمه در عدد واحد کمتر از عدد اضلاع

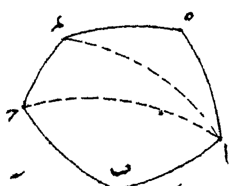
برهان ـ بوهم از راس ا اقطار اح و اد و غیره را بسایر رئوس وصل نمائیم پس کثیر الاضلاع

تقسیم شود بمثلثاتیکه عدد شان دو واحد کمتر از عدد اضلاع آن باشد و مقیاس سطح هر مثلث فضل مجموع زوایای اواست بر دو قائمه و چون مجموع زوایای مثلثات برابرست با مجموع زوایای کثیر الاضلاع پس مقیاس سطح کثیر الاضلاع فضل مجموع زوایایش باشد بر انقدر دو قائمه که عدد اضلاع کثیر الاضلاع منهای دو یعنی بر حاصل ضرب دو قائمه در دو واحد کمتر از عدد اضلاع مرجح ـ فرض میکنیم م مجموع زوایای کثیر الاضلاع باشد و ع عدد اضلاعش پس مقیاس سطح کثیر الاضلاع چنین شود م-۲ (ع-۲) = م-۲ع+۴

قضیهٔ سی ام

هرگاه م عدد زوایای مجسمه کثیر السطوحی باشد و س عدد سطوحش و ع عدد خط الراسهایش گوئیم این رابطه کلی مابین آنها محقق شود م + س = ع + ۲

برهان ـ در درون کثیر السطوح نقطهٔ فرض کنید و از آنجا خطوط مستقیم برؤس جمیع زوایایش وصل نمائید و همان نقطه را مرکز فرض نموده کره توهم نمائید که سطحش جمیع خطوط را قطع کند بهان عدد از نقاط و مابین این نقاط را بقسی دوایر عظام وصل نمائید چنانچه بر صفحه کره اشکال کثیر الاضلاعی نظایر سطوح جسم کثیر السطوح بعد و ترکیب شوند و فرض میکنیم



اب ح ده یکی از آن اشکال باشد و ع عدد اضلاع این شکل پس اگر مجموع زوایای او ب و ح و د و ه را م فرض کنیم مقیاس سطحش چنین شود م-۲ع+۴ و چون همچنین مقیاس سطوح سایر کثیر الاضلاع کروی را بدست آوردیم و همه را جمع کنیم نتیجه چنین بدست آید که مجموع آنها یعنی سطح کره که بحسب مقیاس علامتش ۸ است مساوی شود با مجموع زوایای اشکال کثیر الاضلاع منهای مضاعف عدد اضلاعش ع بعلاوه ۴م که بعدد سطوح تکرار شود و چون مجموع زوایائیکه حول هر راس مثل او در زده اند معادل است باچهار قائمه پس مجموع

زوایای کثیرالاضلاع مساوی باشد با ۴ برابر عدد زوایای مجسمه پس چنین باشد ۴م و عدد
مضاعف عدد اضلاع اب و ب ج و ج د و غیره مساویست با چهار برابر عدد خط الراسها یعنی
۴ل چونکه خط الراس ضلع دو سطح است پس این تساوی حاصل شود ۸ = ۴م − ۴ل
+ ۴س و چون تساوی را بر چهار قسمت کنیم ۲ = م − ل + س پس م + س = ل + ۲

نتیجه - از حکم مذکور چنین نتیجه شود که مجموع زوایای مسطحه که از آنها زوایای مجسمه کثیر السطوحی ترکیب میشود مساویست با آنقدر چهار قائمه که برابر آحاد م − ۲ باشد
یعنی باین صورت ٤ ق × (م − ۲) و سابق ذکر شد که م عدد زوایای مجسمه است
زیرا که چون یکی از آن سطوح را منظور آوریم و عدد اضلاعش را ع فرض کنیم مجموع زوایایش بحسب قائمه چنین میشود ۲ع − ۴ و چون جمیع زوایای سطوح را بجا بیاییم جمع کنیم میزان جمیع ۲ع
یعنی مضاعف عدد اضلاع جمیع سطوح مساوی میشود با ۴ل و چهار برابر عدد سطوح = ۴س
پس مجموع زوایای همه سطوح = ۴ل − ۴س و بنابر حکم قضیه ل − س = م − ۲
و چون آنرا چهار برابر کنیم ۴ل − ۴س = ۴ (م − ۲) پس مجموع زوایای مسطحه مساوی شد با آن
برحکم مذکور چندین نتیجه متفرع شود که سزاوار است شرح دهیم

اولاً - در کثیر السطوحی فرض میکنیم ب عدد مثلثاتی باشد که در جزو سطوحش مندرج شد
و ج عدد مربعات و د عدد مخمسات و غیره پس کل عدد سطوحش اینمجموع باشد ب + ج
+ د + ه + ... و کل عدد اضلاعش اینمجموع ۳ب + ۴ج + ۵د + ۶ه + ...
و حاصل جمع ثانی مضاعف عدد خط الراسها است چونکه هر خط الراس متعلق باشد بدو سطح

پس از این قرار　　س = ب + ج + د + ه + ...

۲ل = ۳ب + ۴ج + ۵د + ۶ه + ...

و بحکم قضیه مذکور م + س = ل + ۲ پس چون معادل س و ل را در این تساوی قرار دهیم چنین شود

=۴۲

۲م = ۴ + ب + ۲ج + ۳د + ۴ه + ۵و + ...

نکتهٔ اول آنکه از روی روابطی که در این تساوی‌ها بین مقادیر هست می‌بینیم که عدد سطوح فرد ب + د + و + ... همواره زوج است

وچون من باب اختصار فرض کنیم ه = ج + ۲د + ۳ه + ۴و + ... دو تساوی مذکور چنین شود

ع = ۳/۲ س + ۱/۲ ه

م = ۲ + ۱/۲ س + ۱/۲ ه

واز این قرار در هر جسم کثیر السطوح این دو نامساوی محقق باشد ع > ۳/۲ س و م > ۲ + ۱/۲ س ولی باید دانست که علامت > متضمن مساوات نیز باشد چونکه تواند شد ه = ۰

وعدد جمیع زوایای سطحیهٔ کثیر السطوح ۲ع باشد وعدد زوایای مجسمه‌اش م واز این قرار عدد متوسط زوایای سطحیه که هر زاویهٔ مجسمه را ترکیب میکنند این باشد ۲ع/م این عدد ممکن نیست کمتر باشد از ۳ چونکه در ترکیب زاویهٔ مجسمه اقلاً ۳ زاویهٔ سطحیه لازم است پس باید ۲ع > ۳م ولی علامت > متضمن مساوات نیز باشد وچون در این نامساوی بجای ع و م معادلشان را از س و ه قرار دهیم چنین شود ۳س + ه > ۶ + ۳/۲ س + ۳/۲ ه یا ۳س > ۱۲ + ه وچون در این نامساوی بجای س و ه معادلشان را از ب و ج و د وغیره قرار دهیم چنین نتیجه شود

۳ب + ۲ج + د > ۱۲ + ۰ + ۲و + ۳و + غیره

وازاینجا معلوم میشود که ب و ج و د ممکن نیست یکمرتبه صفر باشند وبنابراین هیچ کثیر السطوحی یافت نشود که عدد اضلاع جمیع سطوحش از پنج بیشتر باشد

وچون سابق این نامساوی نتیجه شد س > ۴ + ۱/۳ ه پس بعد از وضع در مقادیر م و ع این دو نامساوی دیگر نتیجه شود م > ۴ + ۲/۳ ه و ع > ۶ + ه

ولی از نامساوی اول این هم نتیجه شود ه ≤ ۳س - ۱۲ و بعد از وضعش در مقدار م و ح
این دو نامساوی م ≤ ۲س - ۴ و ح ≤ ۳س - ۶ و باید دانست که دو علامت
≤ و ≥ متضمن مساوات نیز باشند و حدود مذکوره در عموم اجسام کثیر السطوح محقق
باشد و وقوع یابد

ثانیاً - فرض میکنیم ۲ح ≥ ۴م و اینفرض در شماری از اجسام کثیر السطوح سزاوار و
مناسب باشد واسماً در آنهائیکه جمیع زوایای مجسمه شان مرکب باشد از چهار سطح یا بیشتر و در آن
صورت این نامساوی نتیجه شود س ≥ ۸ + ه و بعد از تبدیل

ب ≥ ۸ + د + ۲ه + ۳و + ...

پس در اینحالت مجسم باید اقلاً دارای هشت سطح مثلث باشد و از حد مذکور س ≥ ۸ + ه
این دو نامساوی نتیجه شود م ≥ ۶ + ه و ح ≥ ۱۲ + ۲ه ولی از همان نامساوی
نیز نتیجه شود ه ≤ س - ۸ و بعد م ≤ س - ۲ و ح ≤ ۲س - ۴

ثالثاً فرض میکنیم ۲ح ≥ ۵م و اینفرض از جمله کثیر السطوح تعلق گیرد بآنهائیکه زوایای
مجسمه شان اقلاً مخمس باشد و آنوقت نتیجه میشود س ≥ ۲۰ + ۳ه یا

ب ≥ ۲۰ + ۲د + ۵ه + ۸و + ...

و نیز این دو نامساوی م ≥ ۱۲ + ۲ه و ح ≥ ۳۰ + ۵ه و بالجمله از اینکه ه ≤
۱/۳ (س - ۲۰) این دو حد بدست میاید م ≤ ۲/۳ (س - ۲) و ح ≤ ۵/۳ (س - ۲)
و دیگر نتوان فرض کرد ۲ح ≧ ۶م زیرا که عموماً محقق است که ۲ح + ۲ه + ۱۲ =
۶م پس هیچ کثیر السطوح یافت نشود که جمیع زوایای مجسمه اش مرکب باشد از شش زاویه
سطحیه یا بیشتر و در حقیقت اقلاً مقداریکه هر زاویه سطحیه داشته باشد
معادلست با زاویه مثلث متساوی الاضلاع و شش عدد از این زوایا چهار قائمه میشود

و آن مناسب زاویهٔ مجسمه نباشد

رابعاً - کثیر السطوح فرض میکنیم که جمیع سطوحش مثلثات باشند آنوقت ه = ٥ و چنین نتیجه شود ع = $\frac{3}{2}$ سه و م = ۲ + $\frac{1}{2}$ سه و علاوه بر آن فرض میکنیم که زوایای مجسمه کثیر السطوح بعضی مخمس باشند و بعضی مسدس و ل عدد زوایای مجسمه مخمس باشد و لـ عدد مسدس پس م = ل + لـ و ۲ع = ٥ل + ٦لـ وآنوقت این تساوی نتیجه شود ٦م - ۲ع = ل و لی از سابق ع = $\frac{3}{2}$ سه و م = ۲ + $\frac{1}{2}$ سه پس ل = ٦م - ۲ع = ۱۲ پس اگر کثیر السطوحی جمیع سطوحش مثلث باشند و زوایای مجسمه اش بعضی مخمس و بعضی مسدس عدد زوایای مجسمه مخمس همیشه ۱۲ باشد ولی عدد مسدسات مطلق است و چون لـ را بحالت ابهام واگذاریم در جمیع این نوع اجسام م = ۱۲ + لـ و سه = ۲۰ + ۲لـ و ع = ۳۰ + ۳لـ

اینمطلب را ختم کنیم بطلب عدد شروط یا معلومات که لازم باشند در تعیین کثیر السطوحی و اینمسئله مهم است و ظاهر است تا کنون غیر منحل بوده

اول فرض میکنیم که کثیر السطوح نوعی مشخص باشد یعنی معلوم باشد عدد سطوحش و عدد اضلاع آنسطوح جدا جدا و وضع آنها نسبت بهمدیگر پس از اینقرار اعداد سه و م و ع و همچنین ب و ح و د و ه و غیره همه بر ما معلوم است و مقصود با تشخیص عدد معلومات اصلیه از خطوط و زوایا بر وجهیکه بتوان بوساطت آنها کثیر السطوح را طرح کرد و شناخت

یکی از سطوح این جسم را منظور آورده قاعده اش فرض میکنیم و ع عدد اضلاع آنقاعده باشد پس در ترسیم و تشخیص آنقاعده ۲ع - ۳ معلومات لازمست و عدد زوایای مجسمه خارج از قاعده این باشد م - ع و در تشخیص رأس هر زاویه سه معلوم باید در دست باشد

وازاینقرار در تشخیص م – ع عدد از رؤس ۳ م – ۳ ع عدد معلومات قاعده را

بر آن بیفزائیم مجموعا چنین شود ۳ م – ع – ۳ ولی این عدد کلیة بیش از اندازه است و باید آن

از کاست عدد شروطی را که قید شده اند برای آنکه رؤس متعلقه بر سطح جسم در سطحی مستوی واقع

شوند و عدد اضلاع قاعده را ع فرض نموده ایم حال عدد اضلاع سایر سطوح را عَ و عً و...

فرض کنیم و چون بر ۳ نقطه وضع سطحی مشخص شود پس آنچه در هر کدام از اعداد عَ و عً و.... از ۳ تجاوز

کند شروطی باشد که قید شده است محض آنکه رؤس مختلفه واقع شوند در همان سطوحی که با آنها

مربوط اند و عدد مجموع این شروط مساوی باشد با این حاصل جمع (عَ – ۳) + (عً – ۳)

+ (عٌ – ۳) +.... و عدد جملهای این سلسله س – ۱ باشد و از سابق میدانیم که ع +

عَ + عً +.... = ۲ ح پس حاصل جمع این سلسله این باشد ۲ ح – ع – ۳ (س – ۱) و چون

این مجموع را تفریق کنیم از ۳ م – ع – ۳ باقی ماند این جمله ۳ م – ۲ ح + ۳ س – ۶ و این نظر

بتساوی م + س = ح + ۲ تحویل شود باین مقدار ح پس عدد معلومات لازمه

در تشخیص کثیر السطوحها زمیان افراد نوع خود برابر است با عدد

خط الراسهای جسم مطلوب ولی باید دانست که معلومات مذکوره را

نباید کیف اتفق اختیار نمود از میان خطوط و زوایائیکه اصول جسم مطلوب باشند زیراکه

اگرچه عدد معادلات برابر عدد مجهولات باشد ممکن است که بعضی وابسطه بمعلومات مسئله را

میتوان منتج نماید مثلا بنا بر آنچه نتیجه شد اگر در کثیر السطوحی خط الراسهایش تنها معلوم باشد

میتوان آن جسم را طرح نمود و حال آنکه در بعضی حالات این معلومات کفایت نکند مثلا اگر

منشور غیر مثلث القاعده مفروض باشد میتوان منشورات بشمار دیگر ترتیب داد که خط الراسهای

جمیع آنها با آن مساوی باشد و بهمان ترتیب واقع باشند زیراکه چون عدد اضلاع قاعده از ۳

تجاوز نموده میتوان با همان اضلاع مقدار زوایا را تغییر داد و بنا بر این آن قاعده را بصور و اشکال

باید چون ۲ ع – ۳ عدد معلومات ع

پشمارد آورد و نیز میتوان وضع خط الرأس طولی هشور را نسبت بسطح قاعده اش تغیر داد چون
این دو نوع تغیر را با هم ترکیب کنیم هشورات پشماری بدست آید که خط الرأسها و اضلاعشان همه متساوی است
پس معلوم میشود که بمعرفت خط الرأسهای تنها نمیتوان در اینحالت جسم مطلوب را مشخص نمود
معلوماتیکه برای تعیین جسمی اختیارشان سزاوار باشد باید چنان باشند که وجودشان
هیچ ابهام و مجهولی باقی نماند و پیش از آنکه باب بهم از روی آنها بیرون بیاید و اول در تعیین قاعده
اب ح د ه میان وجوه معموله یکی آنست که معلوم باشد ضلع اب و دو زاویه مجاوره ب ا ح
و اب ح بازاء نقطه ح و دو زاویه د ب ا د و اب د بازاء نقطه د و هکذا و بعد م نقطه باشد
که باید موضعش را در خارج سطح قاعده مشخص نمود تعیین این نقطه بعد از توهم هرم م ا ب ح
یا سطح م ا ب موقوف است بمعرفت دو زاویه م ا ب و ا ب م و میل سطح م ا ب
نسبت بقاعده ا ب ح پس چون بعم بساطت چنین سه معلوم وضع هر کدام از رؤس کثیر السطوح
در خارج سطح قاعده مشخص شود ظاهر است که یک کثیر السطوح مطلق بدست آید نه بیش و هر گاه
بوجوه مختلفه از روی همان معلومات دو کثیر السطوح ترکیب کنیم البته متساوی باشند بلی اگر در
طرفین سطح قاعده طرح شده باشند آن دو قرینه همدیگر شوند

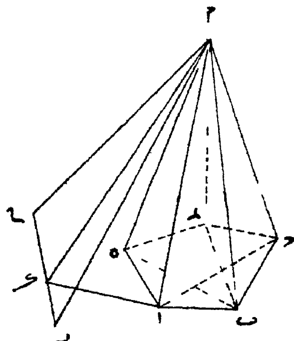
و در همه حالت لازم نیست که برای تعیین هر رأس از کثیر السطوح سه معلوم در دست باشد
زیرا که اگر فرض کنیم نقطه م باید واقع شود در سطحی که سابق وضعش مشخص شده مثلاً فصل
مشترکش با قاعده خط د ح باشد همین قدر که ما انحطاط را جدا کنیم معرفت دو زاویه م ح د
و م د ح کافی باشد در تعیین آن نقطه و از اینقرار یک معلوم کمتر لازم شد و اگر نقطه م باید
یکمرتبه بر دو سطح مشخص واقع شود یا بر فصل مشترکشان م ل که سطح اب ح را بر ل قطع نموده در نصورت
ضلع ال و زاویه ال م و میل سطح ال م نسبت بقاعده بر ما معلوم است و از معلومات
جدید همان زاویه م ال کفایت کند و نظر باین نکات است که عدد معلومات لازمه در تعیین

کثیر السطوحی بوجه مطلق منتهی شود بعد خط الرأسهایش ح

بضلع اب و بح - ۱ عدد از زوایا جسم کثیر السطوحی مشخص شود و بضلع دیگر و هما نزوایا کثیر السطوحی متشابه آن طرح شود بنابراین عدد شروطی که لازم باشد برای آنکه دو کثیر السطوح هم نوع متشابه شوند برابر است با عدد خط الرأسهایش منهای واحدی

مسئله که حل نمودیم مختصر میشد اگر نوع کثیر السطوح معلوم نبود و قید میشد بلکه همان عدد زوایا مجسمه اش م شها معلوم بود زیرا که آنوقت از روی ۳ معلوم مثلثی بمیل خود رسم میکردیم و ۳ راسش بدست می آید و آنمثلث را قاعده جسم فرض میکردیم و بعد عدد رؤس خارج این قاعده م - مه بود و در تعیین هرکدام ۳ معلوم لازم بود و آنوقت عدد کل معلومات لازمه در تعیین کثیر السطوح این میشد ۳ + ۳ (م - ۳) یا ۳ م - ۶

پس عدد شروط لازمه در اینکه دو کثیر السطوحی که عدد زوایای مجسمه شان م باشد متشابه شوند اینست ۳ م - ۷



ضمیمهٔ دو مقالهٔ ششم و هفتم
در طرح اجسام کثیر السطوح منتظمه
قضیهٔ اول

اجسام کثیرة السطوح منتظمه پنجگانه باشند نه بیش

زیرا که در تعریف آنها چنین گفتیم اجسامی باشند که جمیع سطوح اطراف شان کثیر الاضلاع منتظمه متساویه اند و جمیع زوایای مجسمه شان نیز متساوی و این شروط ممکن نیست صدق کنند جز در عدد قلیلی از حالات اولاً اگر سطوح مثلثات متساویة الاضلاع باشند هر زاویه مجسمه را میتوان ترکیب نمود از ۳ عدد از زوایای این مثلثات یا از چهار عدد یا از پنج عدد و از این تراکیب ۳ جسم منتظم حاصل شود چهار سطحی و هشت سطحی و بیست سطحی و بیش از این ۳ نوع از مثلثات متساویة الاضلاع نتوان ترکیب کرد زیرا که شش زاویه آنها معادل شود با چهار قائمه و صلاحیت ترکیب زاویه مجسمه ندارند (ق ۲۴ و ۵)

ثانیاً اگر سطوح مربعات باشند زوایای شان را میتوان ۳ تا ۳ ترکیب نمود و از آن جسم شش سطحی حاصل شود یعنی مکعب و چهار زاویه مربع معادل شود با چهار قائمه و صلاحیت ترکیب زاویه مجسمه ندارند

ثالثاً اگر سطوح مخمسات منتظمه باشند زوایای شان را نیز میتوان ۳ تا ۳ ترکیب نمود و آنوقت جسم دوازده سطحی حاصل شود

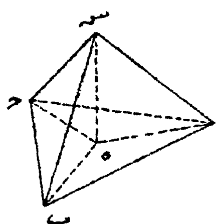
و از این حد دیگر نتوان تجاوز کرد زیرا که ۳ زاویه مسدس منتظم معادلست با چهار قائمه و ۳ زاویه مسبع از چهار بیشتر است

پس معلوم شد که عدد اجسام کثیر السطوح منتظمه منحصر باشد در پنج عدد ۳ تا شان مرکب باشند از مثلثات متساویة الاضلاع و یکی از مربعات و یکی از مخمسات

شرح — و حال در قضیهٔ ذیل مبرهن سازیم که این پنج نوع کثیر السطوح حقیقتاً وجود خارجی دارند و چون یکی از سطوح شان معلوم باشد میتوان جمیع ابعاد و اجزای شان را مشخص نمود

قضیهٔ ۲ مسئله

هرگاه یکی از سطوح کثیر السطوح منتظم معلوم باشد و یا یکی از اضلاع مجسم را بچه و چه باید ترکیب نمود و طرح کرد

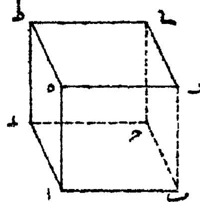


این مسئله پنج صورت دارد و بترتیب شرح میدهیم

در طرح و ترکیب چهار سطحی

اب ح مثلث متساوی الاضلاع است که باید یکی از سطوح چهار سطحی باشد و از نقطه ه مرکز مثلث عمود ه س را بر سطح اب ح اخراج کنید و منتهی نمائید بنقطه س چنانچه اس مساوی شود اب را و وصل نمائید خط س ب و س ح را و هرم س اب ح چهار سطحی مطلوب است

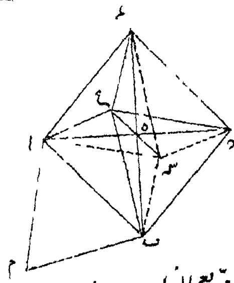
برهان ـ نظر بتساوی ابعاد ه ا و ه ب و ه ح خطوط مائله س ا و س ب و س ح متساویة البعد باشند از موقع عمود س ه و بنابراین متساوی شوند و بعمل س ا = اب س بر چهار سطح هرم س اب ح مثلثات مساوی با مثلث مفروض اب ح و زوایای مجسمه این هرم چون هرکدام مرکب شده از سه زاویه سطحیه متساویه پس هرم جسمی باشد چهار سطحی منتظم



در طرح و ترکیب شش سطحی

اب ح د مربع مفروض است و بر این قاعده منشور قائمی طرح کنید که ارتفاع ش اه مساوی باشد با ضلع اب و در اینصورت ظاهر است که سطوح این منشور همه مربعات متساویه اند و زوایای مجسمه اش متساویه چون هرکدام مرکب اند از سه زاویه قائمه پس این منشور جسمی است شش سطحی منتظم یعنی شکل مکعب است

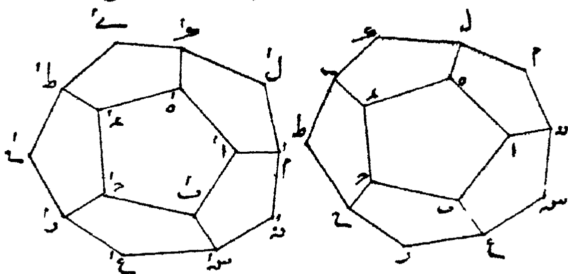
در طرح و ترکیب هشت سطحی



ا م ب مثلث متساوی الاضلاع مفروض است و بر ضلع
اب مربع ا ب ج د را رسم میکنیم و از نقطهٔ ه مرکز مربع
عمود ع ح را بر سطحش اخراج میکنیم و از طرفین بر ع
و ح منتهی مینمائیم چنانچه ه ع = ه ح = ا ه وبعد
خطوط ح ا و ح ب و ع ا وغیره را وصل میکنیم تا
حاصل شود جسم ح ا ب ج د ع مرکب از دو هرم مربع القاعده ح ا ب ج د و
ع ا ب ج د که بر قاعدهٔ مشترکه ا ب ج د تکیه بر یکدیگر کرده اند و این جسم هشت سطحی منتظم مطلوب است
برهان- مثلث ا ه ح قائمه است بر ه و همچنین مثلث ا ه د واضلاع ا ه و ه ح و ه د
متساوی هستند پس این دو مثلث متساوی باشند و ا ح = ا د و بهمین وجه ثابت میشود
که سائر مثلثات قائمة الزوایای ا ه ع و ب ه ح و د ه ع وغیره متساوی هستند با مثلث
ا ه د پس جمیع اضلاع ا ب و ا ح و ا ع وغیره متساوی باشند و بنا بر این جسم ح ا ب ج د ع
محدود باشد بهشت مثلث متساوی و مساوی با مثلث متساوی الاضلاع مفروض ا ب م و
گوئیم علاوه بر آن زوایای مجسمهٔ کثیر السطوح متساوی باشند مثلاً زاویهٔ ح مساویست با زاویهٔ ب
برهان- ظاهر است که مثلث ح ا د مساوی باشد با مثلث ب ا د وبنا بر این زاویهٔ ا ح د
قائمه است پس شکل ح ا ع د مربعی باشد مساوی با مربع ا ب ج د حال چون هرم ب ا ح د ع
را بنجم هرم ح ا ب ج د قاعدهٔ ا ح ج ع هرم اوّل تواند واقع شود بر قاعدهٔ ا ب ج د
دوّیم و آنوقت نقطهٔ ه چون مرکز مشترک است ارتفاع ه ب جسم اوّل منطبق میشود بر ارتفاع
ه ح دوّیم و دو هرم حکم یک هرم پیدا کنند پس زاویهٔ مجسمهٔ ح مساوی شود با زاویهٔ
مجسمهٔ ب پس جسم ح ا ب ج د ع هشت سطحی منتظم باشد
شرح- هرگاه سه خط متساوی ا د و ب د و ح ع متقاطع شوند و عمود بر اوساط

بهمدیگر پس اطراف شان روش هشت سطحی منتظم باشد

در طرح و ترکیب دوازده سطحی

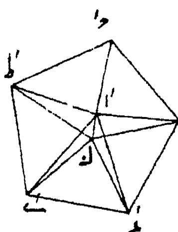


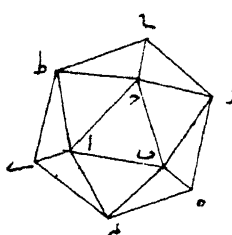
اب ج د ه مخمس منتظم مفروض است و ا ب ع و ج ب ع دو زاویه سطحیه اند مساوی بازاویه ا ب ج ازاین سه زاویه سطحیه زاویه مجسمه ب را ترکیب کنید و فرض میکنیم م س ل یکی ازاین سطوح باشد نسبت به یکدیگر بهمین وجه بر نقاط ج و د و ه و از زوایای مجسمه مساوی بازاویه ب ترکیب کنید چنانچه همه بوضع آن باشند و چون بمبدء باز رسید سطح ج ب ع منطبق شود ابر ب ج ع چونکه میل هر دو بنسبت بسطح اب ج د ه همانمقدار م است میتوان بر سطح ع ب ج ع مخمس ب ج ع ب ع را مساوی با مخمس اب ج د ه رسم نمود و چون مانند اینعمل را در سایر سطوح ج د... و د ه ل وغیره بنمائیم سطح محدب ع ب ع ط .... صورت بندد مرکب از شش مخمس منتظم همه متساوی و همه میل م بنسبت بمجاور خود حال فرض میکنیم ع ف ظ .... سطحی دیگر باشد مساوی ع ب ع ط .... و گوئیم میتوان این دو را بهمدیگر چنان متصل نمود که یک سطح محدب مسلسل ترکیب شود بوجهی که زاویه س ع د مثلاً میتواند ملحق شود بدو زاویه س ع ب و ب ع د و ترکیب شود زاویه مجسمه ع مساوی بازاویه ب و در این اتصال هیچ تغیری در میل و سطح ب ع د و ب ع س عارض نشود چونکه همانمقدار است که باید و شاید برای ترکیب زاویه مجسمه ولی آنوقت که زاویه مجسمه ع صورت

بسبب ضلع ع ز منطبق شود بر مساوی خود ع د و بر نقطه د مجتمع گردد سه زاویهٔ سطحیه ع د ع و ع ز ح و ح ز ع و از ترکیب آنها صورت بندد زاویهٔ مجسمه مساوی با هر کدام از زوایا که سابق ترکیب شده و این اتصال نیز هیچ تغیر در حالت زاویهٔ ع ندهد و نه در حالت سطح ح ز ط و غیره زیرا که چون دو سطح ع ز ع و ح ز ع که سابق بر ع مجتمع شده اند میلشان نسبت بهم بهمان مقدار شایسته م است و همچنین دو سطح ح ز ع و ح ز ع و چون بهمین و جه اندک اند پیش دو یم ظاهر میشود که دو سطح درست بهمدیگر متصل شوند و سطحی مسلسل و بر بسته حاصل شود و چنین شکل همان دوازده سطحی منتظم است چونکه مرکب شده از دوازده مخمس منتظم متساوی و جمیع زوایای مجسمه اش نیز متساوی هستند

در طرح و ترکیب بیست سطحی

فرض میکنیم اب ح یکی از سطوح اطرافش باشد و اول زاویهٔ مجسمه ترکیب کنیم از پنج سطح هر کدام مساوی با اب د و چنانچه همه





بیک میل باشند نسبت بمجاور خود و لهذا بر ضلع ب ح مساوی ب ح مخمس منتظم ب ح ط را رسم میکنیم و از مرکزش عمود ك ا را اخراج میکنیم بطوریکه ح ا مساوی شود با ب ح و خطوط ا ح و ا ط و ا ب و ا م را وصل میکنیم و زاویهٔ مجسمه ا مرکب از پنج سطح ب ا ح و ح ا ط و غیره زاویهٔ مطلوبه است زیرا که خطوط مائله ا ب و ا ح و غیره متساوی هستند و ا ب که یکی از آنها باشد مساویست با ضلع ب ح پس جمیع مثلثات ب ا ح و ح ا ط و غیره متساوی باشند و مساوی با مثلث مفروض اب ح و نیز ظاهر است که سطوح ب ا ح و ح ا ط و غیره همه بیک میل اند نسبت

بمجاور خود زیرا که زوایای مجسمهٔ ب و ح و .... چون هر کدام مرکب اند از دو زاویهٔ مثلث متساوی
الاضلاع و از یک زاویهٔ مخمس منتظم متساوی باشند و فرض میکنیم م میل مابین دو سطحی باشد که دارا
دو زاویهٔ متساویه اند و از این قرار م میل هر کدام از سطوح زاویهٔ مجسمهٔ ا باشد نسبت بمجاور خود
بعد از این مقدمه چون بر نقاط ا و ب و ح زوایای مجسمه ترکیب کنیم هر کدام مساوی با زاویهٔ ا
سطح محدب ا ه و ح .... صورت بندد مرکب از ده مثلث متساوی الاضلاع که میل هر کدام
نسبت بمجاور خود مقدار م است و زوایای ا و ه و د و غیره از اطرافش بترتیب مرکب باشند
از سه زاویه و از دو زاویهٔ مثلثات متساویة الاضلاع حال سطحی دیگر توهم میکنیم مساوی با سطح ا ه
و ح .... این دو سطح را میتوان بهم مربوط ساخت باینکه هر زاویهٔ مثنای یکیشان را متصل نمائیم
بزاویهٔ مثلثهٔ دیگری و چون سطوح این زوایا سابقاً بمیل م ترکیب شده اند یعنی بهمان قدر که سزاوار
است برای ترتیب زاویهٔ مجسمهٔ مخمسه که مساوی باشد با ا پس در این ارتباط هیچ تغیر عارض نشود
در حالت این دو سطح یکان و بعد از ارتباط سطح مسلسلی حاصل شود مرکب از بیست مثلث
متساوی الاضلاع و این بعینه بیست سطحی منتظم است چونکه جمیع زوایای مجسمه نیز متساوی هستند

قضیهٔ ۳ مسئله

میخواهیم میل دو سطح مجاور را از یکی از آن اجسام کثیر السطوح را نسبت بیکدیگر معلوم کنیم
این میل بواسطهٔ استنباط شود از قاعدهٔ ترکیبی که در هر کدام از پنج نوع کثیر السطوح منتظم شرح دادیم
بنا بر آنکه راجع نمائیم آنرا باین مسئلهٔ ثبت شده صورتی که هرگاه معلوم باشد سه زاویهٔ سطحیه که از آنها زاویهٔ مجسمه
ترکیب میشود چگونه باید معلوم نمود زاویهٔ سطحیه را که مابین دو تا از آن سطوح احداث شده و سابق در
آخر مقالهٔ پنجم اشاره باین مسئله شد

در چهار سطحی هر زاویهٔ مجسمه مرکب باشد از سه زاویهٔ مثلثات متساویة الاضلاع
پس باید از روی مسئلهٔ مذکوره طلب نمود زاویه را که مابین دو سطح از این سطوح حادث شده و آن

زاویهٔ میل دو سطح مجاور چهار سطحی است

و در شش سطحی س ۲ زاویهٔ حادثه مابین هر دو سطح مجاور قائمه است

و در هشت سطحی س ۳ باید زاویهٔ مجسمه ترکیب کنید از دو زاویهٔ مثلث متساوی الاضلاع و از یک زاویهٔ قائمه و میل دو سطحی که دارای دو زاویهٔ مثلث اند میل مطلوب دو سطح مجاور هشت سطحی است

و در دوازده سطحی س ۴ هر زاویهٔ مجسمه ترکیب باشد از سه زاویهٔ مخمس منتظم و از انیقرار میل مابین دو عدد از این زوایا میل دو سطح مجاور دوازده سطحی است

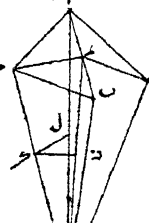
و در بیست سطحی س ۵ زاویهٔ مجسمه ترکیب کنید از دو زاویهٔ مثلث متساوی الاضلاع و از یک زاویهٔ مخمس منتظم و میل مابین دو سطح که دارای دو زاویهٔ مثلث اند میل دو سطح مجاور بیست سطحی است

قضیهٔ ۱۴ - مسئله

ضلع کثیر السطوح منتظمی معلوم است و میخواهیم شعاع کرهٔ محاطیه و شعاع کرهٔ محیطیه بر آن جسم را مشخص کنیم

اول باید ثابت نمود که هر کثیر السطوح منتظمی را میتوان در کره محاط کرد و نیز کره بر آن محیط نمود

اب ضلعی است مشترک در دو سطح مجاور و ح و ه مرکز دو سطح و ح د و ه د دو عمود باشند که از آن دو مرکز بر ضلع مشترک اب فرود آمده و هر دو واقع شوند بر نقطهٔ د وسط آن ضلع و زاویهٔ حادثه مابین این دو عمود همان میل مابین دو سطح مجاور است و مقدارش از روی مسئلهٔ سابقه مشخص پس اگر در سطح ح د ه عمود بر اب دو خط ح م و ه م را عمود کنیم بر ح د و ه د و امتداد شان دهیم تا ملاقی شوند بر م گوییم این نقطه مرکز مشترک کرهٔ محاطیه و کرهٔ محیطه است و شعاع اول خط م ح است و شعاع ثانی خط م ا



برهان - چون دو عمود کثیر الاضلاع ح د و ه د متساوی هستند و وتر د م مشترک است

مثلث قائم الزاویه ح د م مساوی شود با مثلث قائم الزاویه ه د م و ۱۹ و ا پس عمود ح م
مساوی شود با عمود م ه و لی اب چون عمود است بر سطح ح د ه سطح اب ح نیز عمود شود
بر ح د ه و ۱۸ و ۵ یا بالعکس ح د ه عمود شود بر اب ح و چون ح م در سطح ح د ه عمود است
بر ح د فصل مشترک ما بین دو سطح عمود ح د ه و اب ح پس عمود شود بر سطح اب ح و ۲۹ و ۵
و بهمین دلیل ه م عمود شود بر سطح اب ه پس دو عمود ح م و ه م که از مرکز دو سطح مجاور متقاطع
براین دو سطح اخراج شده متقاطع شوند بر نقطه مثل م و متساوی گردند حال فرض میکنیم اب ح و
اب ه دو سطح مجاور دیگر باشند چون عمود کثیر الاضلاع ح د بحالت خود باقی ماند همچنین زاویه
ح د م که نصف ح د ه است پس مثلث قائم الزاویه ح د م و ضلعش ح م در جمیع سطوح
کثیر السطوح متساوی هستند پس اگر از مرکز م و بشعاع م ح کره رسم کنیم ان کره جمیع سطوح
جسم را بر مراکزشان تماس کند (زیرا که دو سطح اب ح و اب ه عمود اند بر طرف شعاع)
و کره محاط شود در کثیر السطوح یا کثیر السطوح محیط شود بر کره

حال دو خط م ا و م ب را وصل کنید پس نظر متساوی ح ا و ح ب دو مائل م ا
و م ب چون متساوی البعد اند از موقع عمود متساوی باشند و این حکم کلی است در سایر خطوط
که از مرکز م بطرفین هر ضلع وصل شوند پس مجموع این خطوط متساوی شوند و بنا بر این اگر از مرکز
و بشعاع م ا کره رسم کنیم سطحش مرور کند بر رؤس جمیع زوایای مجسمه کثیر السطوح و کره محیط
شود بر این جسم یا این جسم محاط شود در کره

بعد از اینقدر حل مسئله سابق هیچ اشکال ندارد و دستورش از اینقرار است
چون ضلع سطحی از جسم کثیر السطوح معلوم باشد آن سطح را رسم کنید و عمودش ح د را بدست
آورید و از روی مسئله سابقه طلب کنید میل ما بین دو سطح مجاور این جسم را و بعد زاویه ح د ه
را مساوی با این میل رسم نمائید د ه را مساوی د ح جدا کنید و دو خط ح م و ه م را عمود کنید

بر ح د و ه د این دو عمود متقاطع شوند بر نقطه م پس ح م شعاع کره محاطیه در کثیر السطوح باشد
و بعد از استقامت ه د جزء ح ا را مساوی شعاع دایره محیطیه بر یکی از سطوح جسم جدا کنند
و م ا را وصل کنند پس آن شعاع کره محیطیه بر جسم باشد

زیرا که دو مثلث قائم الزاویه ح د م و ح ا م از این شکل مساوی باشند با دو مثلث قائم
الزاویه که بهمین اسم در شکل سابق است و از این قرار بعد از آنکه ح د و ح ا شعاع دو دایره محاطیه
و محیطیه یکی از سطوح جسم باشند م ح و م ا دو شعاع کره محاطیه و محیطیه بهمان جسم باشند

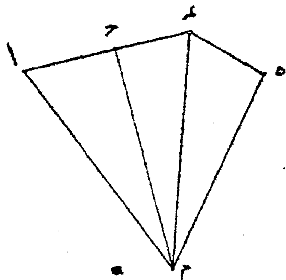
شرح - بر احکام مذکوره چند نتیجه متفرع باشد

اولا - هر کثیر السطوح منتظم را میتوان قسمت نمود بانقدر عدد اهرام منتظمه که آن جسم دارای سطوح
باشد و رأس مشترک جمیع آن اهرام مرکز کثیر السطوح باشد و آن بعینه مرکز دو کره محاطیه و محیطیه است

ثانیا - مساحت حجم هر کثیر السطوح منتظم مساویست با حاصل ضرب سطح محیطش در ثلث شعاع کره محاطیه

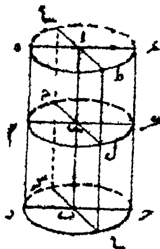
ثالثا - دو کثیر السطوح منتظم که بیک اسم باشند یعنی هر دو چهار سطحی یا هشت سطحی و غیره دو
جسم متشابهند و اضلاع متناظر شان متناسب پس اشعه دو کره محاطیه یا محیطیه متناسب
باشند بنسبت هر دو ضلع متناظر اند و جسم

رابعا - چون کثیر السطوح منتظمی را در کره محاط کنیم و سطوحی از مرکز و از طول جمیع اضلاعش گذرانیم
سطح کره را قسمت نمایند بانقدر عدد از کثیره الاضلاع کروی متساویه و متشابهه که در
جسم مفروض سطوح باشد



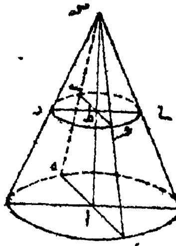
مقاله هشتم
در احوال سه جسم مستدیر
یعنی کره و استوانه و مخروط

تعریف



۱- استوانه مستدیره جسمی است حادث بدوران مربع مستطیل اب جد حول ضلع ساکن اب و هرجا استوانه مطلق گوئیم مقصود مستدیر است

در این حرکت دو ضلع اد و بج از حالت قیام نسبت به اب خارج نمیشوند و دو سطح مستدیر متساوی دعط و جسمی را رسم کنند و آنها را دو قاعده استوانه گوئیم و خط جد سطح بدن استوانه را حادث کند و آن خط محدث گوئیم



خط ساکن اب را محور و سهم استوانه گوئیم

هر مقطع که در استوانه عمود شود بر محور دایره است مساوی با هر کدام از دو قاعده زیرا که در اثنای ضمن که مستطیل اب جد حول اب دوران میکند خط ـ ل عمود بر اب سطح مستدیر رسم کند مساوی قاعده و چنین سطح بعینه مقطعی است که از نقطه ـ عمود شود بر محور

هر مقطع مثل عسعط که در طول محور باشد مربعی است مستطیل مضاعف مستطیل محدث

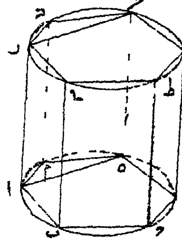
۲- مخروط مستدیر جسمی است حادث بدوران مثلث قائم الزاویه سه اب حول ضلع ساکن سه ا و هرجا مخروط مطلق بگوئیم مقصود مستدیر است

در این حرکت ضلع اب سطح مستدیر ب‌ده را رسم کند و آنرا قاعده مخروط

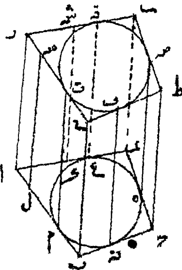
گوئیم و وتر س و ب سطح بدنش را حادث کند
نقطه س را راس مخروط گوئیم و س ا را سهم و محور یا ارتفاعش را گویند
اضلاعش هر مقطع که در مخروط عمود باشد بر محور دایره است مثل ح ا د ب و هر مقطع که در
جهة محور باشد مثل س ح ب مثلث متساوی الساقین است مضاعف مثلث محدث
س ا ب

۳ - چون سطحی موازی قاعده از مخروط س ح د ب موضوع نمائیم مخروط کوچک س ه ل ر
را جسم باقی ح ب ح د را مخروط ناقص گوئیم
و میتوان توهم کرد که این مخروط ناقص حادث شده باشد بدوران ذوذنقه ا ب ط ح
که دو زاویه اش ا و ط قائمه باشد حول ضلع ا ط و خط ساکن ا ط محور مخروط ناقص
باشد و دو دایره ب ه د و ح ا ر دو قاعده اش و ب ح ضلعش

۴ - دو استوانه و دو مخروط را متشابه گوئیم هرگاه دو محورشان بر نسبت دو قطر قاعده باشد



۵ - چون در دایره ا ح د که قاعده استوانه فرض شده
کثیر الاضلاع ا ب ح د ه را محاط کنیم و بر قاعده این کثیر
الاضلاع منشور قائمی بارتفاع استوانه طرح نمائیم این
منشور را محاط در استوانه گوئیم و استوانه را
محیط بر منشور



و ظاهر است که خط الراسهای ا د و ب ح و ح ط
منشور چون عموداند بر سطح قاعده واقع شوند در سطح پهلو
استوانه پس این منشور و این استوانه در طول خط الراسها
مماس بهمدیگر باشند

۶- بهذا اگر اب حد کثیرالاضلاعی باشد محیط بر قاعده استوانه و بر قاعده این کثیرالاضلاع منشور قائمی بارتفاع استوانه طرح کنیم منشور را محیط بر استوانه گوئیم و استوانه را محاط در منشور م و ن ..... نقاط تماس اضلاع اب و ب حد و ... اند و از آنها عمودهای م ت و ن ف ..... بر سطح قاعده اخراج شده پس ظاهر است که آنها مشترک باشند در سطح استوانه و منشور محیطی هر دو پس خطوط مماس باشند ما بین دو سطح

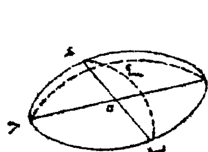
۷- و باز اینجا مکرر میکنیم که سطح محدب آنستکه چون بر هر نقطه‌اش سطحی مماس کنیم آن سطح در یک سمت آن افتد و از اینقرار کره سطح محدب است

سطح استوانه نیز محدب است زیرا که چون بر یکی از نقاطش خط سمی فی مرور دهیم و در نقطه طرف انحطاط خطی بر قاعده مماس کنیم سطح مرور کننده برین دو خط مماس استوانه است و در یک سمت آن افتاده

و بهمین دلیل سطح مخروط محدب است

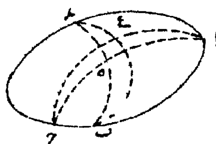
تنبیه- از جمله اجسام مستدیره همین استوانه و مخروط و کره در اصول هندسه ذکر شود و سایر متعلق باشند بعلم مخروطات که هندسه تفصیله‌اش نیز گوئیم

مقدمات چند از اصول موضوعه



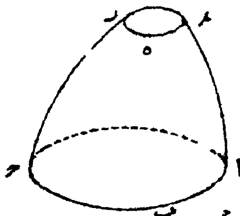
اولاً هر سطح مستوی مثل ه اب حد کوچکتر باشد از هر سطح دیگر مثل ع اب حد که بر او احاطه داشته باشد و از اطراف منتهی شده باشد بهمان حد اب حد

این ایراد جزو مطالب واضحات است محتاج به برهان نیست



ثانیاً- هر سطح محدب مثل ه اب حد کوچکتر باشد از محدب دیگر که از اطراف بر آن احاطه داشته باشد و منتهی شده باشد بهمان حد اب حد

برهان ـ اگر سطح ه اب حد کوچکتر نباشد از جمیع سطوحیکه بر آن محیط باشند فرض میکنیم که در جمله آن سطوح ع اب حد سطحی باشد از همه کوچکتر و نهایتش مساوی باشد با اب حد و بر نقطه مثل ه از سطح محدب ه اب حد سطحی مستوی میگذرانیم که در یک طرف آن افتد پس این سطح تلاقی نماید سطح ع اب حد را و جزء مقطوعش بزرگتر باشد از سطح مستوی که محدود شده باشد باطراف آن بنابر مقدمهٔ اولی پس اگر باقی سطح ع اب حد را بگیریم و بر آن بیفزائیم سطح مستوی را بجای قطعهٔ مقطوعه آنوقت سطح جدیدی داریم که از اطراف احاطه دارد بر سطح ه اب حد و کوچکتر است از ع اب حد و ما این سطح را اول کوچکتر از جمیع فرض نموده بودیم پس فرض غلط است و سطح محدب ه اب حد کوچکتر است از هر سطحی که بر آن محیط شود و از اطراف منتهی شود بهمان حد اب حد



شرح ـ بمانند همین دلیل این دو حکم دیگر ثابت شود

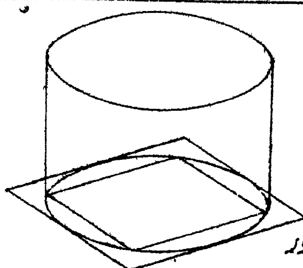
اولاً ـ اگر سطح محدب محدود بدو منحنی اب ح و ده محاط شود در سطحی دیگر که بهمان دو منحنی منتهی گردد پس سطح محاط کوچکتر باشد از محیط

ثانیاً ـ اگر سطح محدب اب از جمیع اطراف محاط شده باشد در سطح دیگر م ن خواه نقاط و خطوط و سطوح مستویه میان آنها مشترک باشد یا هیچ نقطه مشترکه نداشته باشند پس سطح محاط کوچکتر باشد از محیط

قضیهٔ اول

مساحت حجم استوانه مساویست با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع

برهان ـ محاط میکنیم و محیط بر قاعده استوانه دو کثیر الاضلاع منتظم متشابه و دو منشور



و دو منشور قایم بر این دو قاعده کثیر الاضلاع طرح میکنیم با ارتفاع استوانه

و فرض میکنیم قه قاعده محیطی باشد و ق قاعده محاطی

و ح جسم محیطی باشد و ط جسم محاطی و ع ارتفاع منشور

حال ظاهر است که حجم استوانه مندرج باشد مابین دو حجم اند و منشور و چون عدد اضلاع دو قاعده را بشمار مضاعف کنیم حجم اند و منشور متدرجا باستوانه نزدیک شوند زیرا که منشورات محیطیه روی بتناقص نهند و منشورات محاطیه روی بتزاید و بالجمله اگر ثابت کنیم که تفاضل مابین یکی از منشورات محیطیه و منشور محاط نظیرش ممکن است کوچکتر از هر مقدار مفروض شود آن وقت معلوم میشود که حد مشترک این منشورات حجم استوانه است پس گوئیم

چون ح = قه × ع (۱)

و ط = ق × ع (۲)

بعد از تفریق تساوی دوم از اول

ح − ط = (قه − ق) × ع

و سابق ق ۱۳ و ۱۴ ذکر شد که حد قه − ق صفر است هرگاه عدد اضلاع دو کثیر الاضلاع بشمار مضاعف شود و عامل ع مقدارش ثابت است پس تفاضل ح − ط ممکن است کوچکتر شود از هر مقدار که قابل اشاره حسّی بود

بعد از این مقدمه از تساوی (۱) که مابین دو مقدار تغیر پذیر ح و قه × ع مقرر شد پی بریم بتساوی حدود آنها پس

حجم استوانه = مساحت دایره × ع

نتیجه ۱ ــ دو استوانه که بر یک ارتفاع باشند نسبتشان مثل سطح دو قاعده است

و دو استوانه که بر یک قاعده باشند نسبتشان مثل دو ارتفاع است

نتیجه ۲ – دو استوانه متشابه بر نسبت دو مکعب دو ارتفاع خود باشند یا بر نسبت مکعب دو قطر قاعده زیرا که دو قاعده بر نسبت مربع دو قطر خود باشند و چون دو استوانه متشابهند دو قطر قاعده بر نسبت دو ارتفاع باشند (تعریف ۴) پس دو قاعده بر نسبت مربع دو ارتفاع باشند پس حاصل ضرب دو قاعده در ارتفاع یعنی حجم دو استوانه بر نسبت مکعب دو ارتفاع باشند

شرح – فرض میکنیم نق شعاع قاعده استوانه باشد و ع ارتفاعش پس مساحت قاعده این باشد π نق۲ و مساحت حجم استوانه این π نق۲ × ع یا π نق۲ ع

قضیه دویم

مساحت سطح بدن منشور قائم مساویست با حاصل ضرب محیط قاعده اش در ارتفاع منشور

برهان – در شکل تعریف ۵ این سطح مساویست با مجموع مسطحات اد ب و ب د ط ح و ح ط ـ د وغیره که آنرا ترکیب نموده اند و ارتفاعات این مستطیلات او و ب د ح ط وغیره مساوی هستند با ارتفاع منشور و مجموع قواعدشان اب و ب ح و ح م وغیره محیط قاعده منشور است پس مجموع این مستطیلات یعنی سطح بدن منشور مساویست با حاصل ضرب محیط قاعده اش در ارتفاع

نتیجه – دو منشور قائم هرگاه بیک ارتفاع باشند دو سطح بدنشان بر نسبت دو محیط دو قاعده بشان باشد

قضیه سیم

سطح بدن استوانه اعظم باشد از سطح هر منشور محاطی اش و اصغر باشد

از سطح هر منشور محیطیش

اوّلا فرض میکنیم اب مده یکی از سطوح منشور محاطی باشد و ادب مده فاج

باشد از استوانهٔ نظیر آن و گوئیم اب مده > ادب مده

برهان – اول فرض میکنیم اب مده > ادب مده و تفاضل ایشان ف باشد و از تقاطع

اه استوانه را انقدر امتداد میدهیم تا نقطهٔ ح که اح مساوی شود ع برابر اه را

وضمناً منشور و استوانه را نیز امتداد میدهیم پس فاج

ادب طلح و سطح اب طح هر کدام ع برابر فاج

ادب مده و سطح اب مده شوند پس تفاضلشان

ع ف باشد و میتوان ع را عددی گرفت که

ع ف اعظم شود از مجموع دو قطعه دایره ادب و ح

ل ط پس چون بفرض اب طح – ادب طلح = ع ف این نامساوی حاصل شود اب طح

– ادب طلح > ادب + ح ل ط و از اینجا اب طح > ادب طلح + ادب + ح ل ط

یعنی سطح مستوی اب طح اعظم است از سطح محیطیش که منتهی شده است بدوره آن و این نتیجه بنا

بر مقدمهٔ اول باطل است

حال فرض میکنیم اب مده = ادب مده و بر نقطهٔ ح وسط قوس اب خط

مماس ح و را رسم میکنیم با دو وتر اح و ح ب آنوقت در مثلث اب ح این

نامساوی حاصل شود اح + ح ب > اب پس چون سه سطح ه ح و ر ب و ه ب

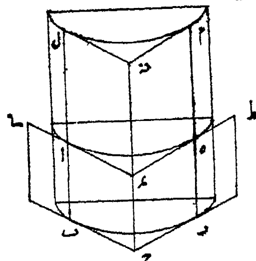
یک ارتفاع دارند مجموع دو تای اول اعظم باشد از سیم ه ب و بعبارت اخری اعظم از

فاج ادب مده پس مستطیل ه ح که نصف مجموع دو سطح ه ح و ر ب است اعظم

میشود از فاج ادح ه که نصف فاج ادب مده است و این نتیجه بنا بر آنچه در فوق ذکر

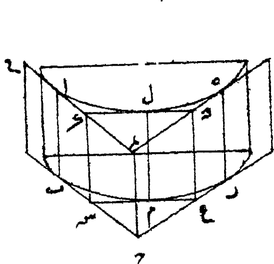
شد باطل است

وچون سطح اب د ه ممکن نشد بزرگتر باشد از قاج ا ه ب د ه ونه مساویش البته کوچکتر از آن باشد پس سطح منشور محاطی اصغر باشد از سطح استوانه



ثانیاً- ح د و ط د دو سطح مجاور زند از منشور محیطی ومیکوئیم قاج استوانه ا ه د ب اصغر است از مجموع دو مسطح ا د و د ب

برهان- اگر قاج ا ه د ب را بزرگتر فرض کنیم از مجموع ا د + د ب وبطریق سابق عددی مناسب از استوانهای متساویه توهم نمائیم میرسیم باین نتیجه که سطح محدب ب د م ل اعظم باشد از سطح محیطی که مرکب است از دو مستطیل ل د و م د باضافه دو قطعه ل ه م و ب د ه واگر فرض کنیم اب د ه = ا د + د ب و دو خط ل ع و س ع را مماس کنیم بر وسط دو قوس ا ه و ب د و ملاحظه نمائیم که خط منکسر ا ل ع د ه اقصر است از مجموع ا ع + ع ه انوقت استنباط شود که مجموع مسطحات ا س و ل ع و ع ر اصغر است از ا د + د ب



یعنی از قاج اب د ه وچون طرفین را نصف کنیم مجموع دو مستطیل ا س + ل م اصغر باشد از قاج استوانه اب م ل واین نتیجه نظر بآنچه سابق معین شده باطل است پس قاج ب د ه ا کوچکتر باشد از مجموع ا د + د ه پس سطح استوانه اصغر است از سطح منشور محیطی

قضیهٔ چهارم

مساحت سطح بدن استوانه مساویست با حاصل ضرب محیط قاعده اش در ارتفاع خود

بُرهان - در سطح محاط و محیط میسکنیم بر قاعده استوانه دو کثیر الاضلاع منتظم متشابه دو منشور قائم بر آنها و کثیر الاضلاع طرح میکنیم با ارتفاع استوانه

پس سطح بدن استوانه مندرج باشد مابین دو سطح دو منشور محاطی و محیطی و بدستور قضیه اول ثابت میشود که چون عدد اضلاع دو قاعده آنها را بی اندازه مضاعف نمائیم حد مشترک بین سطوح منشورات محاطیه و سطوح منشورات محیطیه سطح استوانه است

بعد از این مقدمه فرض میکنیم ع ارتفاع استوانه باشد و سطح پهلوی منشور محیطی سه و محیط قاعده اش م پس

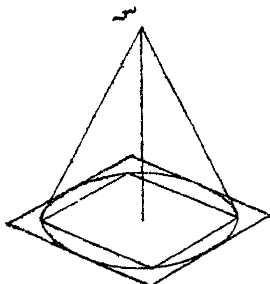
$$س = م \times ع$$

و چون عدد اضلاع کثیر الاضلاع محیطی را بی اندازه مضاعف نمائیم دو مقدار س و م × ع تغیر پذیرند و حد مقدار اول سطح استوانه باشد و حد ثانی محیط دایره × ع پس

$$\text{سطح بدن استوانه} = \text{محیط دایره} \times ع$$

قضیه پنجم

مساحت حجم مخروط مساویست با حاصل ضرب قاعده اش در ثلث ارتفاع آن



بُرهان - محاط و محیط میسکنیم بر قاعده مخروط دو کثیر الاضلاع منتظم متشابه و قاعده میسازیم آنرا برای دو هرم که راس مشترکشان نقطه سه باشد

پس حجم مخروط واقع باشد مابین این دو هرم و

چون عدد اضلاع دو قاعده شان را باندازه مضاعف نمائیم و نقطه رأس برجا ماند حد مشترک حجمهای اهرام محاطیه و محیطیه حجم مخروط باشد و دلیل این حکم بعینه همانست که در قضیه اوّل ذکر شد

پس فرض میکنیم ع ارتفاع مخروط باشد و ح حجم یکی از اهرام محیطیه و ق قاعده آن آنوقت

ح = ق × ع/۳ (۱)

و چون بجای دو مقدار تغییرپذیر طرفین حدشان را قرار دهیم چنین شود

حجم مخروط = سطح دایره × ع/۳

نتیجه - هر مخروط ثلث استوانه است که بر قاعده و ارتفاع آن باشد و بنابرین حکم محکم شود

اولاً - مخروطاتیکه بریک ارتفاع‌اند بر نسبت قواعد خود باشند

ثانیاً - مخروطاتیکه بر قواعد متساویه‌اند بر نسبت ارتفاعات خود باشند

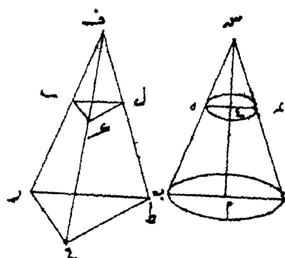
ثالثاً - مخروطات متشابهه بر نسبت مکعبات اقطار قواعد خود باشند یا بر نسبت مکعبات ارتفاعات خود

شرح فرض میکنیم نق شعاع قاعده مخروطی باشد و ع ارتفاع آن پس مساحت حجمش این باشد π نق^2 × $\frac{1}{3}$ع یا $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع

قضیه ششم

مخروط ناقص اه ب کرام و دع دو شعاع دو قاعده اش باشند و ع م ارتفاعش مساحتش این باشد $\frac{1}{3}\pi$. مع (ام^2 + دع^2 + ام × دع)

برهان - فرض میکنیم ف د ح ط هرم مثلث القاعده باشد بارتفاع مخروط س ه ا ب و قاعده اش د ح ط معادل باشد با قاعده مخروط و این دو قاعده را در یک سطح فرض میکنیم آنوقت و رأسشان س و ف بیک فاصله واقع شوند از سطح دو قاعده و امتداد



سطح ه ع ه احداث کند در هرم مقطع
ک ل ل را و حال گوئیم این مقطع معادل
باشد با قاعده ه ه زیرا که دو قاعده
اب و ه ه بر نسبت دو مربع دو شعاع
ام و ع باشند یا بر نسبت دو مربع
دو ارتفاع س م و س ع و دو مثلث ب ع ط و ک ل ل نیز بر نسبت دو مربع همین
دو ارتفاع‌اند پس دو دایره اب و ه ه بر نسبت دو مثلث ب ع ط و ک ل ل باشند
ولی بفرض مثلث ب ع ط معادلست با دایره اب پس مثلث ک ل ل معادل باشد
با دایره ه ه

حال حاصل ضرب قاعده اب در $\frac{1}{3}$ س م حجم مخروط س اب باشد و حاصل
ضرب قاعده ب ع ط در $\frac{1}{3}$ س م حجم هرم ف ب ع ط پس نظر بتعادل دو قاعده حجم هرم
مساوی باشد با حجم مخروط و بهمین دلیل هرم ف ک ل ل معادل باشد با مخروط س ه
ه پس مخروط ناقص ا ه ه ب معادل شود با هرم ناقص ب ع ط ک ل ل و مساحت
قاعده ب ع ط معادل با دایره که شعاع ام است این باشد $\pi \times \overline{am}^2$ و هکذا قاعده
ک ل ل $= \pi \times \overline{ha}^2$ و واسطه در نسبت مابین $\pi \times \overline{am}^2$ و $\pi \times \overline{ha}^2$ اینست
$\pi \times$ ام $\times$ ع ه پس حجم هرم ناقص یعنی حجم مخروط ناقص این باشد

$$\frac{1}{3}\, م ع \times (\pi \times \overline{ام}^2 + \pi \times \overline{ع ه}^2 + \pi \times ام \times ع ه)$$

و آن باین صورت تحویل شود $\frac{1}{3}\, \pi \times ع م \times (\overline{ام}^2 + \overline{ع ه}^2 + ام \times ع ه)$

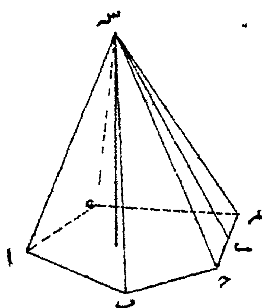
قضیهٔ هفتم

مساحت سطح بدنه هرم منتظم س اب ه ه مساویست با حاصل ضرب

محیط قاعدهٔ اش در نصف عمود سه

اینجا مقصود عمودیست که از راس سه فرود آید بر یکی از اضلاع قاعده هرم

برهان - سطح بدن هرم منتظم مرکب است از مثلثات



متساویة الساقین متساویه سه جـ د و سه ب جـ و

سه ا ب وغیره پس اینچند تساوی حاصل شود

$$\text{سه جـ د} = \text{جـ د} \times \frac{\text{سه ے}}{2}$$

$$\text{سه ب جـ} = \text{ب جـ} \times \frac{\text{سه ے}}{2}$$

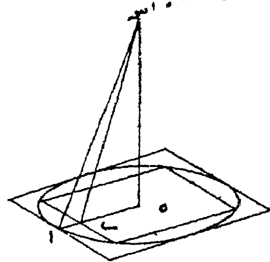
$$\text{سه ا ب} = \text{ا ب} \times \frac{\text{سه ے}}{2}$$

پس چون این تساویات را باهم جمع کنیم مساحت سطح بدن هرم بدست آید ازینقرار

$$(\text{جـ د} + \text{ب جـ} + \text{ا ب} + \text{ه ا} + \text{ه د}) \times \frac{\text{سه ے}}{2}$$

قضیهٔ هشتم ۸

مساحت سطح بدن مخروط مساویست با حاصل ضرب محیط قاعدهٔ اش در نصف ضلع خود مخروط



برهان - فرض میکنیم ه ا شعاع قاعده مخروط باشد و سه ا ضلعش و محاط میکنیم و محیط بر مخروط دو هرم منتظم که دو قاعده شان دو کثیر الاضلاع متشابه باشند

واول این فقره زود معلوم شود که سطح مخروط واقعست مابین دو سطح اندرونی و بیرونی هرم منتظم زیرا که چون بر قاعدهٔ این شکل تکیه دهیم شکلی که درست مساوی باشد آنوقت سطح مضاعف مخروط احاطه کند از یک طرف مضاعف هرم محاطی را و محاط شود از یک طرف در مضاعف هرم محیطی سطح اول اعظم باشد از دویم و اصغر

از سیم و چون همه را نصف کنیم حکم مذکور نتیجه شود

حال فرض کنیم سه سطح هرم محیطی باشد و س سطح هرم محاطی و م محیط قاعده اول و مـ محیط قاعده ثانی پس این تساوی حاصل شود

سه = م × سها/۲ (۱)

س = مـ × سهـ/۲ (۲)

از روی این دو تساوی ظاهر است که چون عدد اضلاع دو قاعده را بی اندازه مضاعف نمائیم دو سطح سه و س بهمدیگر نزدیکتر شوند زیرا که سه روی بتناقص نهد و س روی در تزاید و نیز مبرهن شود که تفاضل سه ـ س ممکن است کوچکتر شود از هر مقدار که قابل اشاره حسی شود

زیرا که سه ـ س = (م × سها ـ مـ × سهـ)/۲

و میدانیم که چون عدد اضلاع دو قاعده را بی اندازه تضعیف کنیم اختلاف مابین م و مـ بی اندازه قلیل شود و علاوه برآن در مثلث سه‌ا این تساوی حاصل است سها ـ سهـ < زا ـ و این مقدار حدّش صفر است پس تفاضل سه ـ س ممکن است کوچکتر شود از هر مقدار مفروض و چون سطح مخروط همواره واقع است مابین سه و س پس حدّ مشترک آنها است (اینمطلب واضح است که هرگاه حدّ دو تفاضل ب ـ بَ و ح ـ حَ صفر باشد تفاضل مابین دو حاصل ضرب ب × ح ـ بَ × حَ کوچکتر شود از هر مقدار مفروضی)

و چون سه = م × سها/۲

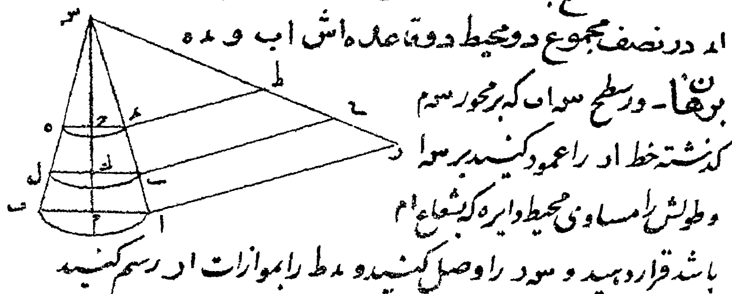
بعد از تبدیل طرفین بحدّ خود این تساوی حاصل شود

سطح مخروط محیط × سها/۲

شرح - فرض میکنیم سه ضلع مخروط باشد و نه شعاع قاعده‌اش پس محیط این قاعده =
۲π نه و مساحت سطح مخروط = ۲π نه × $\frac{1}{2}$ سه یا π نه سه

قضیهٔ نمرهٔ ۹

مساحت سطح بدن مخروط ناقص اده ب مساویست با حاصل ضرب ضلعش
اه در نصف مجموع دو محیط دو قاعده‌اش اب و ده



برهان - در سطح سه اب که بر محور سه م
گذشته خط اد را عمود کشید بر سه ا
و طولش را مساوی محیط دایره که شعاع ام
باشد قرار دهید و سه د را وصل کشید و ه ط را بموازات اد رسم کنید
حال نظر بتشابه دو مثلث سه ام و سه ه ح این تناسب حاصل شود ام : ه ح =
سه ا : سه ه و نظر بتشابه دو مثلث سه اد و سه ه ط این تناسب اد : ه ط = سه ا :
سه ه پس اد : ه ط = ام : ه ح یا = محیط ام : محیط ه ح و بعمل اد = محیط ام
پس ه ط = محیط ه ح بعد از این مقدمه مثلث سه اد که بمساحت اد × $\frac{1}{2}$ سه ا
باشد مساویست با سطح مخروط سه اب که بمساحت محیط ام × $\frac{1}{2}$ سه ا باشد و بمانند
این دلیل مثلث سه ه ط مساویست با سطح مخروط سه ده پس سطح مخروط ناقص اده ب
مساویست با سطح ذوذنقه اده ط و مساحت ثانی است اه × ($\frac{\text{اد + ه ط}}{2}$)
پس مساحت سطح مخروط ناقص اده ب مساویست با حاصل ضرب ضلعش اه در نصف
مجموع دو محیط دو قاعده‌اش

نتیجه - بر نقطه ب وسط اه خط ب ل را بموازات اب رسم کنید و ب ح را بموازات
اد پس بطریق سابق ثابت شود که ب ح = محیط ب ل و مساحت ذوذنقه اده ط نیز =

اه × ب ب = اه × محیط ـ ل پس میتوان برگفت که مساحت سطح مخروط ناقص مساویست با حاصل ضرب ضلعش در محیط مقطعی که بیك فاصله واقع شده باشد از دو قاعده اش

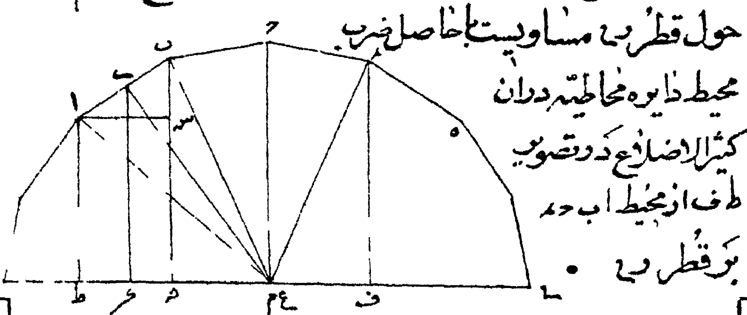
شرح ـ هرگاه خطی مثل اه که تماسش واقع شده است دریک سمت خط م ح و با آن دریک سطح است حول خط ثانی دوران کامل نماید سطحی که بانحرکت حادث شود مساحتش این باشد اه × ((محیط ام + محیط هح)/۲) یا اه × محیط ـ ل زیراکه خطوط ام و هح و ـ ل عمودهائی باشند که از طرفین و از وسط خط اه فرود آمده اند بر محور م ح

وچون اه و م ح را امتداد دهیم تا بر سه متلاقی شوند ظاهر است که سطح حادث بحرکت اه بعینه سطح مخروط ناقصی باشد که دو شعاع قاعده اش م ا و هح باشند چونکه رأس مخروط تام بر نقطه سه است پس مساحت این سطح همانست که ذکر شد

مساحت مذکور بهر حالت تعلق گیرد اگرچه نقطه ه بر سه واقع شود و آنوقت مخروط تام حادث گردد و نیز اگرچه خط اه بموازات محور باشد و آنوقت استوانه حادث شود در حالت اول مقدار هح صفر شود و در صورت ثانی هح مساوی میشود با ام یا ل

قضیه دهم ۱۰

مساحت سطحی که حادث شود بدوران قطعه کثیر الاضلاع منتظم اب ح حول قطر ب ع مساویست با حاصل ضرب محیط دایره محاطیه در آن کثیر الاضلاع در تصویب ط ف از محیط اب ح ه بر قطر ب ع .



برهان - چون نقطهٔ س را بر وسط اب فرض کنیم و س ك را عمود کنیم بر محور این تساوی حاصل شود

مساحت سطح اب = اب × محیط س ك

(مقصود ما از سطح اب و سطح ب ج اینجا دو سطحی است که حادث شوند بدور آن اب و ج

و اسه را بموازات محور رسم کنید آنوقت دو مثلث اب سه و م س ك اضلاع برهمدیگر

عمود میشوند و بنابراین تشابه کروند و این تناسب حاصل کردد

اب : اسه یا ط ذ = م س : س ك = محیط م س : محیط س ك

وازاینجا اب × محیط س ك = ط ذ × محیط م س

پس مساحت سطح اب = ط ذ × محیط م س

و بهمین دلیل مساحت سطح ب ج = ذ ع × محیط م س

و مساحت سطح ج د = ع ف × محیط م س

پس بعد از جمع این تساوی حاصل شود

مساحت سطح اب ج د = (ط ذ + ذ ع + ع ف) × محیط م س = ط ف × محیط م س

نتیجه - هرگاه کثیر الاضلاع منتظمه تصور کنیم که عدد اضلاعش زوج باشد و محور د ح

مرور کند بر دو راس متقابله د و ح مساحت سطح تمامی که حادث شود بدوران نصف کثیر

الاضلاع ا ج ح مساوی شود بحاصل ضرب محورش د ح در محیط دایره محاطیه و این

محور خود قطر دایره محیطیه است

تعریف

۱ - منطقهٔ کروی قطعهٔ است از سطح کره واقعه ما بین دو سطح متوازی که دو قاعدهٔ اش باشند

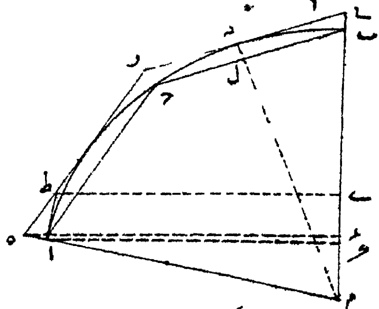
و یکی از این دو سطح ممکن است مماس سطح کره باشد و در اینصورت منطقهٔ صاحب یکقاعده باشد

۲ - ارتفاع منطقه فاصله ما بین دو سطح دو قاعدهٔ او است

۲۲- هرگاه بوهم نصف دایره ه ذ ا ه را حول قطر ه ه دوران دهیم سطح کره حادث شود و ضمناً بحرکت قوس ر ط سطح منطقه بوجود آید ص ۲ و آینده

قضیه پانزدهم

مساحت سطح منطقه کروی مساویست بحاصل ضرب ارتفاعش در محیط دایره عظیمه کره



برهان - اول منطقه اختیار میکنیم که صاحب یک قاعده با و حادث گشته باشد از دوران قوس ا ب حول ه م و در این قوس قطعه کثیر الاضلاع منتظم ا ح ب را محاط میکنیم و قطعه ه ی ح را مشابهش محیط میکنیم

و اول گوئیم که سطح منطقه ا ب واقع باشد ما بین دو سطح س ه و س که حادث میکردند بدوران دو قطعه ه ی ح و ا ح ب حول ه م برهان

منطقه ا ب اعظم است از س چونکه بر آن محیط است و منتهی است بدوره ان ههما و منطقه اصغر است از سطح س ه زیرا که چون مماس ا ط را رسم کنیم دو سطح حادث بحرکت دو قطعه ه ی ح و ا ط ی ح مشارک شوند در جزئیکه حادث شود بحرکت ط ی ح و جزئیکه حادث شود بحرکت ط ه اعظم است از سطح حادث بحرکت ا ط چونکه مساحت این دو سطح و ۹ این دو مقدار است π ط ه $(\frac{ط ب + ه ذ}{۲})$ و π ا ط $(\frac{ط ب + ا ل}{۲})$ و از روی شکل ه ذ > ال و مائل ط ه > ط ا که عمود است بر م ا پس سطح حادث بدوران ه ی ح اعظم شد از سطح حادث بدوران ا ط ی ح و سطح ثانی اعظم است (مقدمه دوم) از منطقه ا ب پس بطریق اولی سطح س ه اعظم باشد از منطقه ا ح ب

حال گوئیم که چون عدد اضلاع دو قطعه کثیر الاضلاع محاطیه و محیطیه را بی شمار مضاعف کنیم و سطح سه و س متدرجاً تقرب جویند بسطح منطقه و این سطح حد مشترک آنها باشد این حکم مبرهن شود باینکه ثابت کنیم که حد تفاضل سه - س صفر است

وچون ق ۱۰ سه = ۲ π م ه × ح ه (۱)

و س = ۲ π م ل × ب ك (۲)

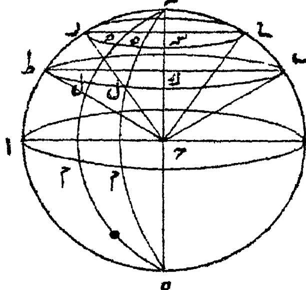
پس سه - س = ۲ π (م ه × ح ه - م ل × ب ك)

و از سابق میدانیم که حد تفاضل مابین م ه و م ل صفر است ق ۱۲ و ۱۴ و علاوه بر آن تفاضل ح ه - ب ك = ا ب - ه ك و اینمقداریست که هر چند خواهیم کوچک میشود چونکه حد ا ب و بطریق اولی حد ه ك صفر است پس تفاضل سه - س کوچکتر از هر مقدار تواند شد و منطقه که همواره مابین سه و س واقع شده حد مشترک آنها باشد

بعد از اینمقدمه چون دو جزء تساوی (۲) را بدو حد خود مبدل کنیم این تساوی حاصل شود

مساحت منطقه ا ب = ۲ π م ه × ب ك

مساحت منطقه ذو قاعدتین که حادث شده باشد بدوران قوس د ط نیز مساوی باشد بحاصل ضرب محیط عظیمه در ارتفاع آن زیرا که آن تفاضل است ما بین دو منطقه ذو قاعده که حادث شده باشند بدوران ه ط و ه د پس مساحتش این باشد محیط ح ه (ه ك - ه س)



یا محیط ح ه × س ك س موجود

نتیجه ۱ - در یک کره یا در کرات متساویه سطوح مناطق بنسبت ارتفاعات آن مناطق باشند

نتیجه ۲ سطح کره را میتوان منطقه

دانست که سطح هر دو قاعده اش مماس کره باشند و از تقاطع قطر کره و بنا بر این مساحتش
مساویست با محیط عظیمه ضرب در قطر و چون شعاع کره را ن فرض کنیم مساحت سطحش
چنین شود

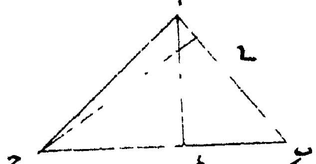
$$\text{سطح کره} = 2\pi ن \times 2 ن = 4\pi ن^2$$

پس معلوم میشود که سطح کره چهار برابر سطح دایره عظیمه است

نتیجه ۳ - چون سطح کره را بوجه مذکور با مربع واحد طول مساحت نمودیم میتوان از و از ایمان
واحد مساحت تاج و مثلثات و کثیرة الاضلاع کروی را مساحت نمود چونکه در مقاله هفتم
نسبت وسعت آنها را بمثلث سه قائمه مشخص نمودیم و مساحت این مثلث ثمن سطح کره است

قضیه دوازدهم ۱۲

مساحت حجمی که حادث شود بدوران مثلث حول محوریکه در سطحش باشد
و بر یکی از رؤس مرور نموده باشد مساویست با حاصل ضرب سطحی که
بجسب ضلع مقابل بان رأس حادث شده در ثلث ارتفاع مثلث که نظیر
ضلع مذکور باشد



برهان - اول فرض میکنیم مثلث ح ا ب حول یکی
از اضلاع خود دوران کند مثل ح ب و حجمی که بآن
حرکت حادث شود مساویست با مجموع دو مخروط حادث بحرکت دو مثلث قائم الزاویه
د ا ح و ا د ب پس این تساوی حاصل شود

$$\text{حجم ح ا ب} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{اد}^2 \cdot ح د + \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{اد}^2 \cdot د ب = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{اد}^2 \cdot ح ب \quad (1)$$

(و مقصود ما از حجم ح ا ب حجمی است که حادث شود بحرکت مثلث ح ا ب حول ح ب)

و چون ح ع را عمود کنیم بر ا ب این تساوی حاصل شود ح ع × ا ب = ح ب × ا د چونکه
هر کدام از این دو حاصل ضرب مضاعف مساحت مثلث ح ا ب باشد و بعد از آنکه در تساوی

(۱) بجای اد × حب قرار دهیم حه × اب را این تساوی حاصل شود

حجم حاب = $\frac{1}{3}$ π . اد × حه . اب = $\frac{1}{3}$ حه . π . اد . اب

و π . اد . اب مساحت سطح بدل مخروطی است که بحرکت اب حادث شود پس

حجم حاب = سطح اب × $\frac{1}{3}$ حه

ثانیا - حال فرض کنیم مثلث حاب دوران کند حول خط حد که بریکی از روئس گذشته

و اب را امتداد دهیم تا محور را بنقطه د قطع کند و حه را عمود کنیم بر اب

حال حجم حاب = حجم حاد - حجم حبد

وچون حجم حاد = سطح اد × $\frac{1}{3}$ حه

و حجم حبد = سطح بد × $\frac{1}{3}$ حه

پس حجم حاب = (سطح اد - سطح بد) × $\frac{1}{3}$ حه =

= سطح اب × $\frac{1}{3}$ حه

ثالثا - دلیل مذکور مبنی شد برآنکه ضلع اب بعد از امتداد محور حد را قطع کند و حال آنکه ممکن است این دو خط متوازی باشند پس باین فرض حرکت کنیم

دو خط اه و بد را از دو رأس مثلث برمحور حد عمود کنیم و حه را از رأس دیگر بر اب و آنوقت این تساوی حاصل شود

حجم حاب = حجم حاه + حجم ابده - حجم حبد

وچون حجم حاه = $\frac{1}{3}$ π . $\overline{اه}^2$. حه

و حجم ابده = π . $\overline{اه}^2$. هد

حجم ح ب د = ۱/۳ π · اه۲ · ح د

و چون دو متساوی اول را با همدیگر جمع کنیم و سیم را از حاصل تفریق کنیم این متساوی حاصل شود

حجم ح اب = π · اه۲ (۲/۳ ح ه + ه د − ۱/۳ ح د)

و چون ح د = ح ه + ه د آن متساوی چنین شود

حجم ح اب = π · اه۲ · ۲/۳ ه د = ۱/۳ · اه · ۲ π · اه · ه د

= ۱/۳ ح ر · سطح اب

و این نتیجه موافق شد با حکم قضیه

قضیهٔ سیزدهم [۱۳]

خط اب ح د س ا قطعه کثیر الاضلاعی است منتظم و ام د قطاع آن که واقع گشته است در یکسمت قطر و ح س ساخت حجمی که حادث شود بدوران قطاع د حول این قطر مساویست با حاصل ضرب سطح حادث بحرکت محیط اب ح د در ثلث عمود م ـ

برهان - حجم حادث بحرکت قطاع ام د بقدر مجموع حجمهائی است که حادث شوند بحرکت مثلثات متساویة الساقین متساویه ام ب و ب م ح و ح م د

و چون حجم ام ب = سطح اب × ۱/۳ م ـ

حجم ب م ح = سطح ب ح × ۱/۳ م ـ

حجم ح م د = سطح ح د × ۱/۳ م ـ

و بعد از جمع حجم ام د = ۱/۳ م ـ (سطح اب + سطح ب ح + سطح ح د)

= ۱/۳ م ـ × سطح اب ح د

تعریف ۱۴

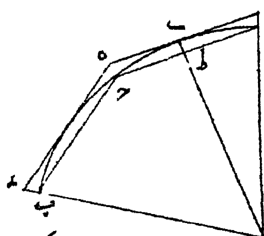
۱- در آن ضمن که نصف دایره م د ا ه س ۱۱ دوران کند حول قطر د ه و کره بوجود آید بحرکت قطاع مستدیر د ح ط نیز جسمی حادث شود معروف بقطاع کروی و قطاع کروی منتهی است بمنطقه که از حرکت قوس ح ط حادث میشود

۲- قطعه کره جزئی است از حجمش که واقع باشد مابین دو سطح متوازی و آندو سطح قاعدتین قطعه است و ارتفاع قطعه فاصله مابین اندو سطح متوازیست

قضیهٔ چهاردهم

مساحت قطاع کره مساویست بحاصل ضرب منطقه اش در ثلث شعاع کره

برهان - ا م ب قطاع دایره است که بدوران خود حول ا م قطاع کره حادث کند



پس محاط و محیط کنیم بر قوس ا ب دو قطعه کثیر الاضلاع منتظم متشابه ب ح ا و د ه د و ظاهر است که حجم قطاع کره واقع باشد مابین دو حجم ح و ی حادث بحرکت دو قطاع کثیر الاضلاع د ه د م و ب ح ا م و علاوه بر آن اگر عدد اضلاع اندو قطعه کثیر الاضلاع را بشمار مضاعف کنیم دو حجم مذکور بقطاع کره تقرب جویند و عمل تضعیف را میتوان انقدر پیش برد که تفاضل مابین هرکدام از دو حجم ح و ی و قطاع کره کمتر شود از هر مقدار مفروضی زیراکه

ح = سطح د ه د × $\frac{1}{3}$ م ب (۱)

ی = سطح ا ح ب × $\frac{1}{3}$ م ط (۲)

و بعد از تفریق ح − ی = $\frac{1}{3}$ (سطح د ه د . م ب − سطح ا ح ب . م ط)

و سابق ذکر شده که چون عدد اضلاع مضاعف شود م ط همواره میل کند بسمت م ب و اختلافش با او بنهایت ضعیف شود و نیز ثابت نموده ایم ف ۱۱ که حد تفاضل سطح

ه ه د - سطح ا ج ع) صفر است پس تفاضل ج - ع انقدر کوچک شود که بخواهیم پس قطاع کروی که همواره واقع است مابین ج و ع حد مشترک آنها است

حال چون دو جزو تساوی (۱) را بدل کنیم بحد خود این تساوی حاصل شود

حجم قطاع کره = منطقه اب × $\frac{1}{3}$ م ب

و اگر قطاع کره حادث میشد بدوران قطاع دایره د ه ط مثل ۱۱ حول قطر ه آنوقت

حجم قطاع د ه ط = قطاع ه ه ط - قطاع ه ه د

و قطاع ه ه ط = منطقه ه ط × $\frac{1}{3}$ ه ه

قطاع ه ه د = منطقه ه د × $\frac{1}{3}$ ه ه

پس بعد از تفریق قطاع د ه ط = $\frac{1}{3}$ ه ه (منطقه ه ط - منطقه ه د)

= $\frac{1}{3}$ ه ه . منطقه د ط

شرح اول - قطاع دایره که محدث قطاع کره است اگر نصف دایره باشد حجم حادث کره تمام میشود ولی آنوقت منطقه بدن قطاع کره سطح کره میشود و آنوقت معلوم میشود که مساحت حجم کره مساویست بحاصل ضرب سطحش در ثلث شعاع

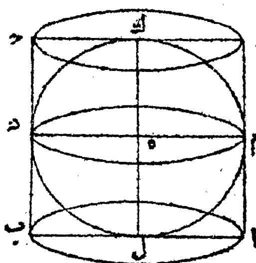
شرح دیگر - فرض میکنیم نه شعاع کره باشد و ع ارتفاع منطقه که بدنه قطاع کروی باشد پس مساحت منطقه این میشود ۲ π نه ع پس مساحت قطاع کروی این میشود ۲ π نه ع . $\frac{1}{3}$ نه = $\frac{2}{3}$ π نه^2 ع

و در آنحالت که قطاع مذکور کره تمام باشد ع = ۲ نه پس مساحت حجم کره مساویست $\frac{2}{3}$ π نه^2 . ۲ نه = $\frac{4}{3}$ π نه^3

و اگر قطر کره را ط فرض کنیم نه = $\frac{ط}{2}$ و نه^3 = $\frac{ط^3}{8}$ پس حجم کره باینصورت نیز میشود $\frac{4}{3}$ π $\frac{ط^3}{8}$ = $\frac{1}{6}$ π ط^3

قضیهٔ پانزدهم

نسبت سطح کره بتمام سطح استوانهٔ محیطیه (با انضمام قاعدتین) مثل ۲ است
به ۳ و نسبت حجم آندو جسم نیز مثل ۲ است به ۳



برهان - م ل د ک دایرهٔ عظیمهٔ کره است و ا ب ج د
مربع محیطی و چون نصف دایره ل م ک و نصف مربع
ل ا د ک را بگردانیم حول قطر ل ک دوران جسیم بحرکت
نصف دایره کره تمام حادث شود و بحرکت نصف مربع
استوانهٔ محیطیه بر کره بوجود آید

ارتفاع اد این استوانه مساویست بقطر ل ک و قاعدهٔ استوانه مساویست بدایرهٔ
عظیمه چونکه قطرش اب مساویست به م د پس سطح محدب استوانه مساویست بمحیط عظیمه
ضرب در قطرش و مساحت سطح کره نیز همین مقدار است ق ۱۱ و بنابرین سطح کره مساویست
بسطح بدن استوانهٔ محیطیه

ولی سطح کره چهار برابر سطح دایرهٔ عظیمه است پس سطح بدن استوانه محیطیه نیز چهار برابر آن دایره
باشد و چون دو قاعده را که هرکدام دایرهٔ عظیمه است بران اضافه کنیم تمام سطح استوانهٔ محیطیه
شش برابر دایرهٔ عظیمه شود پس نسبت سطح کره بتمام سطح استوانه محیطیه مثل ۴ باشد به ۶ یا مثل
۲ به ۳ پس فقرهٔ اول حکم مبرهن شد

و اما ثانی چون قاعدهٔ استوانه محیطیه مساویست بدایرهٔ عظیمه و ارتفاعش قطر کره است مساحت
استوانه مساوی میشود بحاصل ضرب سطح دایرهٔ عظیمه در قطر ق ۱ و مساحت کره مساویست
بحاصل ضرب چهار دایرهٔ عظیمه در ثلث شعاع ق ۱۴ و بعبارت اخری حاصل ضرب سطح دایرهٔ
عظیمه در $\frac{4}{3}$ شعاع یا $\frac{2}{3}$ قطر پس نسبت حجم کره بحجم استوانه محیطیه مثل ۲ است به ۳ و بنابرین

این دو حجم بر نسبت دو سطح خود کشند

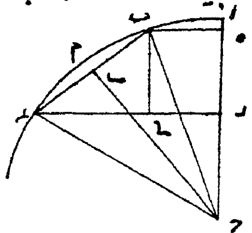
شرح - چون کثیر السطوحی توهم کنیم که جمیع سطوحش مماس کره باشند حجمش را میتوان فرض کرد مرکب از اهرامی چند که رأس مشترک همه بر مرکز کره باشد و قواعدشان سطوح مختلفه کثیر السطوح و ظاهر است که ارتفاع مشترک جمیع ان اهرام شعاع کره است و بنابراین حجم هر هرم مساوی بحاصل ضرب سطحی از کثیر السطوح که قاعده اش باشد در ثلث شعاع پس مساحت حجم تمام کثیر السطوح مساوی باشد بحاصل ضرب سطحش و ثلث شعاع کره محاطیه

پس معلوم میشود که نسبت حجم اجسام کثیرة السطوح محیطیه بر کره بهمدیگر مثل سطوحشان باشد و بنابراین حکمیکه در اول قضیه در خصوص استوانه محیطیه ذکر شد در بسیاری از اجسام جاری و قیاس با تحکم نیز میتوان گفت که سطوح اشکال کثیر الاضلاع محیطیه بر دایره بهمدیگر مثل نسبت محیط خود باشند

قضیه شانزدهم

مساحت حجمی که حادث شود بدوران قطعه دایره ب م د حول قطر ا ح که خارج از قطعه باشد مساویست با حاصل ضرب سدس سطح دایره که شعاعش وتر ب د باشد از ان قطعه در تصویر ه و از وتر ب د بر محور ا ح

برهان - چون از روی شکل



حجم ب م د = حجم ح د م ب − حجم ح د ب

و حجم ح د م ب = $\frac{۲}{۳}$ π ح ب^{۲} . ه و (۱)

حجم ح د ب = $\frac{۱}{۳}$ ح ب × سطح د ب

و چون سطح د ب = ۲ π . ح ب . ه و بعد از وضعش در تساوی سابق

حجم ح د ب = $\frac{۲}{۳}$ π . ح ب^{۲} . ه و (۲)

و بعد از وضع تساوی (۲) از تساوی (۱) این تساوی حاصل شود

$$\text{حجم ب م د} = \frac{۲}{۳}\pi \cdot \text{ه د}\left(\overline{\text{ح ه}}^{۲} - \overline{\text{ح د}}^{۲}\right)$$

و در مثلث ح ب د این تساوی حاصل است $\overline{\text{ح ب}}^{۲} - \overline{\text{ح د}}^{۲} = \overline{\text{ب د}}^{۲} = \frac{\overline{\text{ب م}}^{۲}}{۴}$

پس $\text{حجم ب م د} = \frac{۲}{۳}\pi \cdot \text{ه د} \cdot \frac{\overline{\text{ب م}}^{۲}}{۴} = \frac{۱}{۶}\pi \cdot \overline{\text{ب م}}^{۲} \cdot \text{ه د}$

شرح ـ نسبت حجمی که حادث شود بحرکت قطعه ب م د به حجم کره که قطرش ب م باشد مثل $\frac{۱}{۶}\pi \cdot \overline{\text{ب م}}^{۲} \cdot \text{ه د}$ است به $\frac{۱}{۶}\pi\, \overline{\text{ب م}}^{۳}$ یعنی مثل ه د : ب م

قضیهٔ هفدهم

مساحت قطعهٔ کره واقعه مابین دو سطح متوازی مساویست بر نصف مجموع دو قاعده‌اش ضرب در ارتفاعش باضافهٔ حجم کره که آن ارتفاع قطرش باشد

برهان ـ ب ه و م د دو شعاع قاعدتین قطعه باشند (شکل سابق) و ه د ارتفاعش و این قطعه حادث شود بدوران سطح مستدیر ب م د ه حول محور ه د پس و ع ۱

$$\text{حجم ب م د} = \frac{۱}{۶}\pi \cdot \overline{\text{ب م}}^{۲} \cdot \text{ه د}$$

و ع $\text{حجم ب م د ه} = \frac{۱}{۳}\pi \cdot \text{ه د} \cdot \left(\overline{\text{ب ه}}^{۲} + \overline{\text{م د}}^{۲} + \text{ب ه} \times \text{م د}\right)$

پس قطعهٔ کره چون بقدر مجموع این دو حجم است مساحتش این باشد

$$\frac{۱}{۶}\pi \cdot \text{ه د} \cdot \left(۲\,\overline{\text{ب ه}}^{۲} + ۲\,\overline{\text{م د}}^{۲} + ۲\,\text{ب ه} \cdot \text{م د} + \overline{\text{ب م}}^{۲}\right)$$

ولی چون ب ح را بموازات ه د رسم کنیم این تساوی حاصل شود

$$\text{م ح} = \text{م د} - \text{ب ه} \quad \text{و} \quad \overline{\text{م ح}}^{۲} = \overline{\text{م د}}^{۲} - ۲\,\text{م د} \cdot \text{ب ه} + \overline{\text{ب ه}}^{۲}$$

و بنا بر این $\overline{\text{ب م}}^{۲} = \overline{\text{ب ح}}^{۲} + \overline{\text{م ح}}^{۲} = \overline{\text{ه د}}^{۲} + \overline{\text{م د}}^{۲} - ۲\,\text{م د} \times \text{ب ه} + \overline{\text{ب ه}}^{۲}$

و چون این مقدار $\overline{\text{ب م}}^{۲}$ را در تساوی سابق قطعه قرار دهیم و تصرفات لازمه را نمائیم

حجم قطعه چنین شود $\frac{۱}{۶}\pi \cdot \text{ه د} \cdot \left(۳\,\overline{\text{ب ه}}^{۲} + ۳\,\overline{\text{م د}}^{۲} + \overline{\text{ه د}}^{۲}\right)$

اینصورت را تفصیل کنیم بدو جزء یکی از آنها این باشد

۱/۶ π ۰ ر ۰ (۳ ب۰² + ۳ بَر²) با این ۰ ر ۰ ((π ۰ ب۰² + π ۰ بَر²) / ۲)

وان حاصل ضرب نصف مجموع دو قاعده است در ارتفاع قطعه

واما جزء دیگر ۱/۶ π ۰ ر³ مساحت جسم کره است که بقطره ر باشد پس مساحت هر قطعه

از کره مساویست بفلان

نتیجه - هرگاه یکی از دو قاعده مفقود باشد قطعه کره مذکوره صاحب یک قاعده شود

پس مساحت هر قطعه از کره که بیک قاعده باشد مساویست بنصف استوانه

که بر همان قاعده و همان ارتفاع باشد باضافه کره که آن ارتفاع قطرش باشد

هندسۀ فضائیه

احکام مبرهن ساختنی

۱- هرگاه خطی عمود باشد بر سطحی پس هر سطح دیگر که موازات آنخط باشد عمود میشود بر سطح اول

۲- دو خط متوازی چون سطحی را قطع کنند دو زاویه حادثه متساوی باشد

۳- هرگاه در زاویه ثلثه سطحی دو زاویه سطحیه اش متساوی باشد پس دو زاویه دو سطحی متقابله بآنها دو ضلع متساوی باشند و عکس اینحکم نیز کلی است

۴- در هر زاویه ثلثه سطحی بزاویه دو سطحی بزرگتر سطح وترش نیز اعظم است و بالعکس هرگاه سطح وتر اعظم باشد زاویه دو سطحی مقابله اش اعظم است

۵- در هر زاویه ثلثه سطحی هرگاه ثلثه سطح بر سطوحش عمود کنیم بر وجهیکه مرور کند بر ثلثه خط منصف الزوایای اضلاعش پس در طول خطی مستقیم متقاطع شوند

۶- در هر زاویه ثلثه سطحی هرگاه ثلثه سطح بر خط الراسهایش مرور دهیم چنانچه عمود شوند بر سطوح متقابله پس در طول خطی مستقیم متقاطع شوند

۷- در هر زاویه ثلثه سطحی سطوحی که مرور نمایند بر ثلثه خط الراس و بر خطوط منصفه زوایای سطحیه مقابل بآنها در طول خطی مستقیم متقاطع گردند

۸- چون از راس زاویه ثلثه سطحی در هر سطحش عمودی بر خط الراس مقابل اخراج کنیم آن ثلثه عمود در سطحی مستوی واقع گردند

۹- در هر جسم چهار سطحی خطوط واصله مابین اوساط خط الراسهای متقابله متقاطع شوند و منصف همدیگر باشند

۱۰- هر دو جسم چهار سطحی که در یک زاویه مجسمه مشترک باشند یا متساوی پس نسبتشان بهمدیگر مثل و حاصل ضرب خط الراسهائی است که دارای آن زاویه مشترکه باشند

۱۱- هر دو جسم چهار سطحی که در یکزاویه و دو سطحی مشارک باشند نسبتشان بهمدیگر مثل دو حاصل
ضرب سطوحی است که دارای آن زاویه میباشند

۱۲- سطح منصف یکی از زوایای دو سطحی هرم مثلث القاعده قسمت نماید خط الرأس مقابلش
را بر دو قطعه متناسب با دو سطح مجاور

۱۳- هرگاه جسمی چهار سطحی دارا باشد یکزاویه مجسمه سه قائمه رأسش مربع ضلع مقابل
بآنزاویه مساوی باشد با مجموع مربعات سه سطح دیگر

۱۴- مساحت حجم هر مکعب مستطیل ناقص مساویست با حاصل ضرب قاعده اش در
عمودیکه از مرکز قاعده علیا فرود آید بر قاعده سفلا

۱۵- در هر جسم چهار سطحی خطوط واصله مابین هر رأس و نقطه تقاطع خطوطیکه در سطح مقابلش
از هر رأس مثلث منصف قاعده بنا شده اند خطوط واصله بر یکنقطه متقاطع شوند و این نقطه مرکز ثقل جسم

۱۶- عمودیکه از مرکز ثقل جسم چهار سطحی بر سطح مفروضی فرود آید واسطه باشد مابین چهار عمودیکه
از رؤس همان جسم بر همان سطح فرود آید (و اگر اتفاقاً رؤس مذکوره در یکسمت آنسطح واقع
نباشند حکم مذکور را بچه عبارت باید ادا نمود)

۱۷- هر سطح که مرور کند بر دو نقطه وسط هر دو خط الرأس متقابل جسمی چهار سطحی پس
آنجسم را بر دو قطعه متعادل قسمت کند

۱۸- جسم کثیر السطوحیکه رؤسش اوساط خط الرأسهای چهار سطحی منتظم باشد هشت
سطحی منتظم است

۱۹- بر چهار نقطه غیر واقعه بر سطحی مستوی میتوان کره مرور داد و بیش از یک کره ممکن نباشد

۲۰- در هر جسمی چهار سطحی میتوان کره محاط کرد

۲۱- چون سه کره دو دو متقاطع گردند پس سطوح سه دایره فصل مشترک در طول

خطی مستقیم متقاطع کردند و آنخط عمود باشد بر سطح سه مرکز کره

۲۲ - چون سه خط قائم بر همدیگر کره را قطع کنند و خود بر یکنقطه مرور نمایند پس مجموع مربعات اوتاری که از آنخطوط در کره میمانند مقداری شود ثابت

در امکنهٔ هندسیهٔ مشخص نمودنی و مسائل حل کردنی

در مسطحات مکان هندسی را چنین تعریف کردیم خطی است مرور کننده بر جمیع نقاطی از سطح که همه دارای یکجا صفت مشترکه باشند و اکنون در هندسهٔ فضائی نیز گوئیم که مکان هندسی سلسله باشد از نقاط فضا که جمیعاً در یک شرط یا دو شرط مشخص موافقت کنند و چنین مکان هندسی هم سطح مطلق تواند شد و هم خط

مثلا کره مکان هندسی نقاطی است که جمیعاً بیکفاصله واقع باشند از نقطهٔ مشخصه و عمودی که از مرکز دایره بر سطحش اخراج شود مکان هندسی نقاطی باشند که هر کدامشان بیکفاصله باشند از نقاط محیط

۱- مشخص کنید مکان نقاطی را که بیک فاصله باشند از دو نقطهٔ معینه

۲- معلوم کنید مکان نقاطی را که بیک فاصله باشند از سه نقطهٔ مشخصه

۳- معلوم کنید مکان نقاطی را که بیکفاصله باشند از دو سطح مشخص

۴- معلوم کنید مکان نقاطی را که بیک فاصله باشند از سه سطح مشخص

۵- در فضا مشخص کنید مکان نقاطی را که بیکفاصله باشند از دو خط واقع بر سطحی مستوی

۶- معلوم کنید مکان نقاط فضائیه را که بیکفاصله باشند از سه خط واقع بر سطحی مستوی

۷- معلوم کنید مکان نقاطی را که مجموع دو فاصله هر کدامشان از دو سطح مفروض مساوی شود با طول خط مفروضی

۸- معلوم کنید مکان نقاطی را که مجموع دو مربع دو فاصله هر کدامشان از دو

نقطه مشخصه مساوی شود مربع مفروضی را

۹ - معلوم کنید مکان نقاطی را که تفاضل دو مربع دو فاصله هر کدام از آن از دو نقطه مشخصه مساوی شود مربع مفروضی را

۱۰ - چون دو خط مستقیم غیر واقع در سطحی را برشته از سطوح متوازیه قطع کنیم و دو نقطه فصل مشترک مابین هر کدام از آن سطوح و دو خط مفروض را بخطی وصل کنیم مطلوب است مکان نقاطی که جمیع الخطوط واصله را بنسبت م : ن قسمت کنند

۱۱ - دو خط غیر واقع در سطحی و قائم بر همدیگر تو هم کنید و خطوطی بیک طول مشخص مابین آن دو مندرج نمائید پس مطلوب است مکان اوساط الخطوط واصله

۱۲ - معلوم کنید مساحت حجمی را که حادث شود بدوران مسدس منتظمی حول یکی از اضلاعش

۱۳ - معلوم کنید مساحت حجمی را که حادث شود بدوران نصف مسدس منتظمی که طول ضلعش ب باشد و دوران کند حول قطر دایره محیطه اش

۱۴ - طول ضلع کثیر السطوح منتظمی معلوم است مشخص نمائید شعاع کره محیطه و شعاع کره محاطه اش را

۱۵ - کره بشعاع مشخص داریم مطلوب است ضلع کثیر السطوح منتظم محاطیه اش و شعاع کره که محاط شود در آن کثیر السطوح

۱۶ - کره بشعاع مشخص داریم مطلوب است مساحت سطح و حجم کثیر السطوح منتظم محاطیش

۱۷ - مساحت سطح زمین را بحسب فرسنگ و میریامتر مشخص کنید

۱۸ - مساحت حجم هرمی را مشخص کنید بنا بر آنکه واحد حجم کره باشد بشعاع واحد طول و واحد سطح دایره باشد بشعاع واحد طول

۱۹ - در مثلثی کروی زوایایش بترتیب اینست ۵۸ حـ ، ۸۱ حـ ، ۲۴ حـ ، ۶۴ حـ ، ۸ حـ ، ۱۲ حـ ، ۸۲ حـ ، ۴ حـ

وشعاع کره ۶ ذرع و مطلوب است مساحت آنمثلث بحسب ذرع مربع

۲۰ - مطلوب است حجم قطعه کره ذو قاعده که بارتفاع ۴ ذرع باشد و متعلق باشد بکره که شعاعش بطول ۹ ذرع باشد

۲۱ - دو شعاع قاعدتین مخروط ناقص ۳ ذرع است و ۵ ذرع و طول ضلعش ۷ ذرع مطلوب است مساحت سطح و مساحت حجم آن جسم



تمام شد اصول هندسه
فی غرة شهر ربیع الثانی
سنه ۱۲۹۱
حرره العبد الاثم الخاطی
عبد الرحیم تبریزی
غفر الله تعالی ذنبه



اصول

مثلثات مستقیمة الخطوط

از مقرب الخاقان

آقا میرزا عبد الغفار

نجم الملک تیپ مهندس و معلم کل

و مؤلف علوم ریاضیه

در مدرسه

مبارکه نظامیه دار الفنون

طهران

١٢٩٢

سنه

بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین والصلوة والسلام علی محمد و آله اجمعین

وبعد مخفی نماند که در مملکت ایران فنون عدیده ریاضیه غیر از حساب و هندسه علمی چندان شیوع نداشته و از جمله علوم شریفه مفیده مجهوله که جز چند مسئله پراکنده اش در کتب قدیم ما چیزی ضبط نشده علم مثلثات است و آن بر دو نوع باشد مستقیمة الخطوط و کروی نوع ثانی عمده فایده اش در علم نجوم است و اینجا مقصود بیان نوع اول است و آن در ترتیب علوم تحصیلیه بعد از حساب و اصول هندسه و جبر و مقابله واقع شود و حقیر جانی عبد الغفار بن الفاضل الکامل علی محمد الاصفهانی در اصول حساب سال سنه ۱۲۸۸ هجری اشاره نمود بکتب تعلیمیه که تا آن تاریخ در علوم ریاضی نوشته است برای مدرسه مبارکه دار الفنون عموماً و برای متعلمین هندسه خود خصوصاً و از جمله همین کتاب است اصول در علم مثلثات مستقیمة الخطوط و آن را به سه باب و خاتمه قسمت نمود باب اول در قواعد کلیه باب دویم در حل مثلثات باب سیم در علم زاویه گیری وخاتمه در تعیین ابعاد بتوسط مثلثات شبیهه

فهرست اصول مثلثات

باب اوّل

صفحات

باب دوّیم

صفحات

تنبیه مطالب این کتاب را خود حقیر دو مرتبه بدقت مرور نموده ام و اشکال آنرا نیز کشیده ام امید است کمتر سهو و خطائی در آن واقع شده باشد



مقدمات اصلیه

۱ اول فایده علم مثلثات حل اشکال مثلثه است و حل نمودن مثلث عبارت از آنست که بعضی اصولش را زوایا باشند یا اضلاع استخراج کنیم از روی اصول معلومه دیگر که عددشان کفایت کند در تعیین مثلث

در اصول هندسه قاعده ذکر نموده ایم که از روی چنین معلومات بتوان مثلث را رسم نمود ولی بیشتر آنست که نظر بعیب و نقص آلات هندسی نتوانیم اصول مطلوبه را بدقت تمام مشخص کنیم و تقریب مقادیر عددیه آنها را ندانیم تا چه درجه بدست میاید لهذا اعمال هندسیه را مبدل ساخته ایم باعمال حساب و ظاهر است که وجه ثانی ما را بهتر بمقصود خویش رساند

۲ دوم چون خواهیم مثلثی را باعمال حساب حل نمائیم طول اضلاعش را با مقیاسی که واحد اصلی باشد اندازه بگیریم و مقادیر عددیه این اضلاع را در حساب آوریم و واحد ما ذرع است و فرسخ و متر و امثال اینها

۳ سیم زوایای مثلث را باید نیز در حساب منظور داشت پس مقادیرشان را از روی قوسی دوایر نظایرشان معلوم مینمائیم و راهش اینست که رأس زاویه را مرکز فرض کنیم و بنصف قطری که واحد باشد قوسی ما بین دو ضلعش رسم نموده طول آنرا بحسب درجات معین نمائیم

۴ چهارم درجه سهمی است از ۳۶۰ سهم محیط دایره و آنرا بر ۶۰ دقیقه قسمت کنند و دقیقه را بر ۶۰ ثانیه و درجات و دقایق و ثوانی را بدو نوع علامات بنمائیم علامات فارسی اینست جه قه نیه و علامات نجومی این ° ′ ″ مثلاً ۴۹ درجه ۲۳ دقیقه ۱۹ ثانیه را چنین نویسیم ۴۹جه ۲۳قه ۱۹نیه یا چنین ۱۹″ ۲۳′ ۴۹°

تنبیه در اصول حساب سال ۱۲۸۸ ف ۱۱ نکته در خصوص نوشتن اعداد و نمودن اعمال حساب ذکر نموده ایم که بانند مثال مذکور را بدو وجه میتوان نوشت یکی ۱۹″ ۲۳′ ۴۹°

تنبیه
نمره های مطالب این کتاب با نمره نوشته شده مثل اول و دوم و قسمتهای که خط کشیده در زیر آن بعضی سطور است که نمره نیست که بار دوم هندسیه نوشته شده

حاشیه
متر مقیاس طول فرانسه است که در این زمان در ایران شیوع یافته

ودیگر چنین $\overline{4}9^{\circ}\,23'\,19''$ وجه ثانی نظر بعدم اتحاد سبک مقبول نیفتاد و ذکر شد که چون رسم الخط عدد از یسار براست بیمین آنچه را از اعمال و غیره که متعلق باشد بعد از این بیان نویسیم از یسار بیمین (رجوع کنید بآن شبیه) ولیکن در این کتاب چون بیشتر اعمال در حروف مجری میشود ما رسم قدیم را اختیار نموده همه را از یمین نوشتیم بیسار و علاماتیکه استعمال میکنیم همانها است که در حساب ذکر شد $+$ علامت جمع است و $-$ علامت تفریق $\times$ یا نقطه علامت ضرب $\div$ یا $-$ علامت قسمت $>$ علامت بزرگتری $\sqrt[2]{}$ علامت استخراج ضلع اول عموما و جذر خصوصا

۵ پنجم دو زاویه یا دو قوس چون مجموعشان معادل یک قائمه باشد یعنی ۹۰ درجه آنها را متمم همدیگر گوئیم و هرگاه آن مجموع دو قائمه باشد یا ۱۸۰ درجه آنها را مکمل همدیگر گوئیم

واین دو اصطلاح مکرر استعمال شود باید در نظر داشت

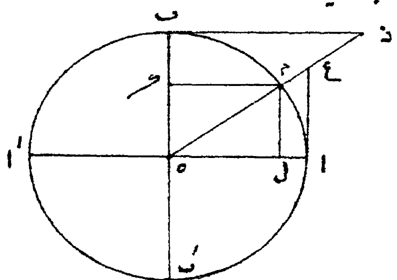
۶ ششم نصف قطر دایره را چون واحد فرض کنیم طول محیط چنین میشود 2π [این صورت π حرف یونانی است و آنرا در جمیع ممالک علامت نسبت محیط دانند بقطر این نسبت ثابت است و کثیر الاستعمال پس علامتی لازم دارد و نزد علمای ما وضع علامت رسم نموده حقیر در قانون ناصری در اصول حساب علامت آن نسبت را چنین قرارداد (نمق) و آن سه حرف اول کلمات نسبت و محیط و قطر باشد ولی اینجا و در اصول هندسه متابعت جماعت نموده همان حرف یونانی را علامت قرارداد و آنرا پی تلفظ کنند رجوع کنند بهندسه] ولهذا در علم مثلثات من باب اختصار محیط دایره را باین علامت 2π بنمائیم و نصف محیط را باین علامت π و ربع محیط را باین علامت $\frac{\pi}{2}$ و غیره و بنابر این متمم قوسی مثل سه را چنین $\frac{\pi}{2} -$ سه و مکمل آنرا چنین $\pi -$ سه و گاه اولی را چنین $90^{\circ} -$ سه و دومی را چنین $180^{\circ} -$ سه

۷ هفتم در معرفت خطوط مثلثاتی - در اعمال مثلثاتی روابط معینه که مابین اضلاع مثلث

وقتی نظایر زوایایش بلاواسطه موجود و محقق باشد اعتبار نکنیم بلکه روابط دیگر را هم
مابین همان اضلاع و بعضی خطوط دیگر که چنان رابطه تمام با قوس مذکوره داشته باشند که هرگاه
آن قوسی معلوم باشند خطوط مذکور بالتبع معلوم شوند و هرگاه آن خطوط معلوم باشند قوس
مذکور بالتبع معلوم شوند و چنین خطوط را خطوط مثلثاتی گوئیم و اکنون مشغول شویم بتعریف آنها

۸ هشتم حدود جیب قوس ام عمود م ل است که از یکطرف آن قوس اخراج شود بقطری که
بطرف دیگر مرور نموده باشد

ظل قوس ام خط ا ع است که بر یکطرف قوس مماس شود و منتهی گردد بقطری که بطرف دیگر مرور کند
و میدائش نقطه تماس است و بسمت ع اعتبار میشود



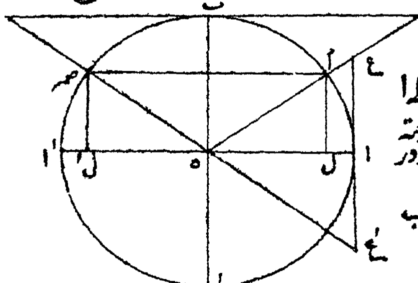
قطر ظل قوس ام خط ه ع است که
از مرکز بطرف ظل وصل شده
تمام قوس ام تا ۹۰ درجه قوس ب م است
حال جیب تمام هر قوس عبارت است از جیب
متمم آن قوس چنانچه جیب تمام قوس ام خط
م ک است و چون این خط مساوی است با ه ل میتوان گفت که جیب تمام قوس خطی است واصل
مابین مرکز و موقع جیب آن قوس جیب تمام ام = ه ل
ظل تمام قوس عبارت است از ظل متمم آن قوس چنانچه ظل تمام قوس ام خط ب ذ است
قطر ظل تمام قوس عبارت است از قطر ظل متمم آن قوس چنانچه قطر ظل تمام قوس ام
خط ه ذ است سهم قوس ام خط ا ل است که واصل باشد مابین طرف قوس
و موقع جیب و سهم تمام قوس عبارت است از سهم متمم آن قوس ولی این دو خط در حل
مثلثات استعمال نشوند خطوط مثلثاتی هر قوس مثل سه را بهمان ترتیب که تعریف

کرده‌ایم من باب اختصار چنین بنمائیم جیب سه ظل سه قل سه جم سه ظم سه قظم سه (قل علامت قطر ظل است و جم علامت جیب تمام و ظم علامت ظل تمام و قظم علامت قطر ظل تمام)

۹ نهم اکنون مشغول میشویم بذکر روابط و نسب عددیه که بوساطت آنها بعضی خطوط مثلثاتی از بعضی دیگر استخراج شوند و نیز در حل مثلثات بکار آیند و نهایت مقصود ما فقره اخیر است و از انحد تجاوز نکنیم و بنابراین چون زوایای مثلث محصور میباشند ما بین صفر درجه و دو قائمه ما غیر از قوسهائیکه ما بین صفر درجه و ۱۸۰ درجه واقع باشند چیزی منظور نیاوریم یعنی که در قوسهای پست تر از صفر درجه و برتر از ۱۸۰ درجه گفتگو نکنیم

۱۰ دهم و ما من باب اختصار و تسهیل اعمال در همه جا نصف قطر دایره را واحد طول فرض کنیم و علامتش را آ قرار دهیم و بنابراین مقادیر عددیه خطوط مثلثاتیکه ما استعمال میکنیم بعینه نسب همان خطوط باشند با نصف قطر

۱۱ یازدهم در استعمال مقادیر منفیه در علم مثلثات نظر باینکه عدد دستورات قلیل باشد مقادیر منفیه را نیز استعمال کنیم و شرایطی که در اینخصوص باید منظور داشت موافق است با آنچه در علم جبر و مقابله ذکر کرده ایم نسبت بمقادیر خطوطیکه در دو جهت مخالف اعتبار شوند (رجوع کنید به ع ۱۰ جبر و مقابله ما)



پس دایره بنصف قطر واحد رسم کنیم و نقطه ا را مبدء مشترک قوسها فرض کنیم و انقوسها را در جهت ا ب ا ب اعتبار کنیم و دو قطر ا ا و ب ب را وصل کنیم پس مقادیر عددیه جیوب و ظلالی را که فوق قطر ا ا باشند مثبت دانیم و آنچه در تحت انقطر باشند

. . . . . . این علامت را - بر سر آنها قرار دهیم و در اعمال حساب حکم مقادیر منفیه را
بر آنها جاری کنیم یعنی مقادیر آنها را منفی دانیم و از اینقرار ظل ا ع از قوس ام مثبت است
و ظل ا عُ از قوس اب صه منفی است و جیب م ل و جیب صه لُ هر دو مثبت باشند
جیوب تمام و اظلال تمام را هرگاه در سمت یمین قطر ب بُ باشند مثبت دانیم و هرگاه در
یسار باشند منفی و از اینقرار جیب تمام ه ل و ظل تمام ب دہ از قوس ام هر دو مثبت اند و
جیب تمام ه لُ و ظل تمام ب دُ از قوس اب صه منفی باشند
قطر ظل و قطر ظل تمام هرگاه بر طرف خود قوس گذرند مثبت اند و هرگاه بر آنطرف مرور کنند
منفی باشند مثلاً قطر ظل ه ع از قوس ام مثبت است و قطر ظل ه عُ از قوس اب
صه منفی است ولی قطر ظل تمامش ه دُ مثبت است

۱۲ دوازدهم پس از این بیانات چنین استنباط میشود که اولاً جمیع خطوط مثلثاتی قوسهای کوچکتر
از ربع محیط مثبت اند چنانچه در قوس ام دیده شد و ثانیاً خطوط مثلثاتی قوسهای واقعه
مابین ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه منفی باشند غیر از جیب و قطر ظل تمام که هر دو مثبت باشند چنانچه در قوس
اب صه دیده میشود

۱۳ سیزدهم در قاعده ترقی و تنزل خطوط مثلثاتی - مقایسه عموم خطوط مثلثاتی را ابتدا کنیم بدین
چگونگی تغیر خطوط مثلثاتی قوسی که از صفر درجه بتدریج متزاید شود تا ۹۰ درجه و بعد از آن
ترقی کند تا رسد به ۱۸۰ درجه

مبدا جمیع قوسها را نقطه ا میگیریم و طرف م از قوس مفروض را اول بسیار نزدیک به
نقطه ا فرض میکنیم و متدرجاً بسمت ب سیر میدهیم و بعد از ب بسمت اُ آنوقت جیوب
جمیع قوسهائی را که باین ترتیب ترقی میکنند در وهم تصور میکنیم و بعد ظلال و سایر خطوط
مثلثاتی شان را پس ظاهر میشود که عموم خطوط مثلثاتی از قرار تفصیل ذیل تغیر میکنند

چنین

باب اول

چون قوس از صفر درجه ترقی کند تا رسد به ۹۰ درجه
جیبش ابتدا از صفر بتدریج متزاید شود تا رسد به ۱ (چونکه سابق نصف قطر را ۱ فرض نمودیم)
و ظل ابتدا از صفر بتدریج ترقی کند تا چون قوس به ۹۰ درجه بسیار نزدیک شود طولش
بسیار بزرگ میشود و از جمیع مقادیر که بوهم بگنجد تجاوز میکند آنوقت که قوس بکمال قرب را
بحد پیدا کند و در حد گوئیم ظل ۹۰ درجه = ∞ یعنی بینهایت است رجوع کنید بعلم جبر و مقابله
و هکذا قطر ظل ابتدا از ۱ ترقی کند تا ∞ و قطر ظل ۹۰ درجه = ∞
و جیب تمام ابتدا از ۱ تنزل کند تا رسد به صفر
و ظل تمام آنوقت که قوس بسیار کوچک باشد بحد طویل است و هرچند قوس ترقی کند
از طولش میکاهد حاصل آنکه از ∞ میرسد به صفر
قطر ظل تمام نیز از ∞ تنزل میکند تا رسد به ۱
و بازاء دو حد صفر درجه و ۹۰ درجه نتایج ذیل استنباط میشود

جیب ۰° = ۰	ظل ۰° = ۰	قل ۰° = ۱
جم ۰° = ۱	ظم ۰° = ∞	قظم ۰° = ∞
جیب ۹۰° = ۱	ظل ۹۰° = ∞	قل ۹۰° = ∞
جم ۹۰° = ۰	ظم ۹۰° = ۰	قظم ۹۰° = ۱

چون قوس از ۹۰ درجه ترقی کند و رسد به ۱۸۰ درجه
جیب مثبتش ابتدا از ۱ تنزل میکند تا بصفر و جیب ۱۸۰° = ۰ و ظل منفی میشود
و ابتدا بسیار طویل است و بتدریج مقدار مطلقش متناقص میشود حاصل آنکه از ∞ - میرسد بصفر
قطر ظل منفی میشود و ابتدا بسیار طویل است و هرچند قوس ترقی کند مقدار مطلقش متناقص
میشود و خلاصه از ∞ - میرسد به ۱ - و قطر ظل ۱۸۰° = ۱-

جیب تمام منفی میشود و مقدارش از صفر میرسد به ۱-
ظل تمام منفی میشود و بتدریج ترقی میکند و از صفر میرسد به ∞ -
قطر ظل تمام مثبت است و بهمین حالت ترقی نموده از جمیع مقادیر بجا و زمیکند حاصل
انکه از ۱ میرسد به ∞ پس خلاصهٔ تفصیل مذکور این میشود

جیب ۱۸۰° = ۰   ظل ۱۸۰° = ۰   قل ۱۸۰° = ۱-

حم ۱۸۰° = ۱-   طم ۱۸۰° = ∞-   قطم ۱۸۰° = ∞

۱۴ چهارم بیما در احوال قوسهای مکمل - مقصود ما اینجا مقایسهٔ خطوط مثلثاتی هر دو قوس مکملات
پس بهتر و آسان تر آنستکه مبدأ آنها را مشترک فرض کنیم بر نقطهٔ م خط م صه را موازات قطر
رسم میکنیم آنوقت قوس سمت یسار ا صه مساوی میشود با ا م و بنابراین ا ب صه =
π - ا صه = π - ا م یعنی ا ب صه مکمل است با ا م
حال قوس ا م را سه فرض میکنیم و ا ب صه مساوی میشود با π - سه پس خطوط
مثلثاتی این دو قوس را بهمدیگر میسنجیم
و دو جیب آنها یعنی م ل و صه ل' چنانچه
ظاهر است مساوی باشند و صاحب یک علامت
و دو جیب تمام آنها یعنی ه ل و ه ل' بحسب مقدار
مساوی هستند ولی بحسب علامت متخالف
و دو ظل آنها یعنی ا ع و ا ع' نیز مساوی هستند و بحسب علامت متخالف و همکذا در باقی
حاصل انکه آن روابط چنین نوشته شود

جیب (π - سه) = جب سه	حم (π - سه) = - حم سه
ظل (π - سه) = - ظل سه	طم (π - سه) = - طم سه

قل (π - سه) = - قل سه | قطم (π - سه) = قطم سه

پس معلوم شد که خطوط مثلثاتی هر دو قوس مکمّل از حیثیت مقدار متحد اند و از حیثیت علامت مختلف غیر از جیب و قطر ظل تمام که هم از حیثیت مقدار و متحد اند و هم از حیثیت علامت

۱۵ — پاره ای در نسبت و روابط مابین خطوط مثلثاتی قوس واحد - خطوط مثلثاتی یک قوس را میتوان بوساطت بعضی دستورهای مختصر بآسانی از همدیگر استخراج نمود و حال مقصود ما بدست آوردن آن دستورها است

قوس ام را بنظر آورده مقدارش را سه فرض میکنیم و خطوط مثلثاتیش را رسم میکنیم آنوقت

م ل = جیب سه   ه ل = حم سه   اع = ظل سه

ه ع = قل سه   ب د = ظم سه   ه د = قطم سه

طول نصف قطر واحد فرض شده و در مثلث ه م ل این تساوی نتیجه میشود $\text{م ل}^2 + \text{ه ل}^2$

$= \text{ه م}^2$ پس $\text{جیب}^2 \text{سه} + \text{حم}^2 \text{سه} = 1$ (۱)

دو مثلث ه م ل و ه ع ا متساوی الزوایا باشند و بنابراین $\frac{\text{اع}}{\text{م ل}} = \frac{\text{اه}}{\text{ه ل}}$

یعنی $\frac{\text{ظل سه}}{\text{جیب سه}} = \frac{1}{\text{حم سه}}$ و بنابراین

$$\text{ظل سه} = \frac{\text{جیب سه}}{\text{حم سه}} \quad (۲)$$

و بتشابه همان دو مثلث نیز این تساوی حاصل شود $\frac{\text{ه ع}}{\text{ه م}} = \frac{\text{اه}}{\text{ه ل}}$

یعنی $\text{قل سه} = \frac{1}{\text{حم سه}}$ (۳)

و برای تعین دستور ظل تمام و قطر ظل تمام رجوع میکنیم بدو مثلث متشابه ه ب د و ه ک م و تناسب اضلاع آنها این تساوی نتیجه میشود

$$\frac{\text{ب د}}{\text{ه ب}} = \frac{\text{ک م}}{\text{ه ک}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ه د}}{\text{ه م}} = \frac{\text{ه ب}}{\text{ه ک}}$$

تنبیه – و (۲) و نتیجه عدد (۱) جامع ... در علامت ... شده تمام ... ارواد ... آنها ... که در برابر ... شده اند

یعنی ظم سه = حم سه / حب سه (۴)

ظم سه = ۱ / حب سه (۵)

چونکه م لـ = ه ل = حم سه و ه لـ = م ل = جیب سه

پس هرگاه یکی از خطوط مثلثاتی قوسی بر ما معلوم باشد میتوان از روی دستورهای مذکور سایر خطوط را استخراج نمود

۱۶ شانزدهم دستورهای نمرها بوارد قوس ام ثابت نمودیم واگرچه این قوس از ۹۰ درجه کوچکتر است ولی دستورها عمومیت دارند و تعلق میگیرند بجمیع قوسهائیکه مابین ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه واقع باشند مثل قوس اب صه وایمطلب از قرار تفصیل ذیل باسانی محقق میشود

جیب اب صه = صه لَ و حم اب صه = - ه لَ و ظل اب صه = - ۱ غ

وغیره واکنون باید قواعد حساب مقادیر منفیه را چنانچه در جبر و مقابله مقرر شده اینجا معمول داشت

در مثلث ه صه لَ این تساوی نتیجه می‌شود صه لَ^۲ + ه لَ^۲ = ۱

وچون (- ه لَ)^۲ مساویست با ه لَ^۲ از تساوی مذکور این تساوی نتیجه میشود

صه لَ^۲ + (- ه لَ)^۲ = ۱ یا حب^۲ اب صه + حم^۲ اب صه = ۱

پس معلوم شد که دستور (۱) بقوس اب صه نیز تعلق میگیرد

بتشابه دو مثلث ه صه لَ و ه ا غ این تساوی نتیجه میشود ا غ / ه ا = صه لَ / ه لَ

ولی اگر دو مقدار مطلق با هم متساوی باشند با علامت نفی نیز متساوی میشوند

پس - ا غ / ه ا = - صه لَ / ه لَ (۲)

وچون - ا غ / ه ا = - ا غ / ه ا و صه لَ / - ه لَ = - صه لَ / ه لَ

از تساوی (۷) این تساوی نتیجه میشود $\frac{\text{اع}}{\text{اه}} = \frac{\text{صه ل}}{\text{ه ل}}$

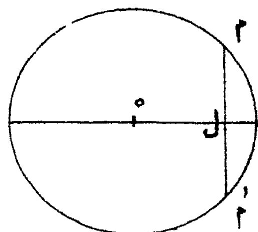
یا ظل اب صه = $\frac{\text{جب اب صه}}{\text{جم اب صه}}$

پس معلوم شد که دستور (۲) نیز بقوس اب صه تعلق میگیرد و همچنین سایر دستورها

۱۷ همچنین ما مثال میخواهیم در نیمقام بی وسایط قواعد دیگر فواید دستورهای مذکور را در

ضمن چند مثال ظاهر نمائیم بنابرآنکه حکم ذیل را بعنوان علوم متعارفه مسلّم داریم

جیب هر قوس نصف وتر مضاعف آنقوس است



مثال م ل = $\frac{۱}{۲}$ م ل مَ

بعد ازین حکم میخواهیم خطوط مثلثاتی قوس ۳۰ درجه را استخراج کنیم قوس ۶۰ درجه سُدس محیط است و وترش ضلع مسدّس و مساوی با

نصف قطر باینصورت وتر ۶۰° = ۱ پس جیب ۳۰° = $\frac{۱}{۲}$

چون جیب قوس ۳۰° معلوم شد سایر خطوط مثلثاتیش را از روی دستورهای سابق

استخراج میکنیم از دستور (۱) این تساوی نتیجه میشود $(\frac{۱}{۲})^{۲}$ + جم^{۲} ۳۰° = ۱

یا جم^{۲} ۳۰° = ۱ − $\frac{۱}{۴}$ = $\frac{۳}{۴}$ و بنابراین جم ۳۰° = $\sqrt{\frac{۳}{۴}}$ = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

از دستور (۲) چنین نتیجه میشود ظل ۳۰° = $\frac{۱}{۲}$: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ = $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

از دستور (۳) ظل ۳۰° = ۱ : $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ = $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ = $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

از دستور (۴) ظم ۳۰° = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$: $\frac{۱}{۲}$ = $\sqrt{۳}$

بالجمله از دستور (۵) قطم ۳۰° = ۱ : $\frac{۱}{۲}$ = ۲

حال میخواهیم خطوط مثلثاتی قوس ۴۵° را نیز استخراج کنیم - وتر ۹۰ درجه ضلع مربع محاطی است و مساویست با $\sqrt{۲}$ و چون وتر ۹۰ درجه مساوی شد با $\sqrt{۲}$

جیب ۴۵° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمام قوس ۴۵ درجه تا ۹۰° خود ۴۵° است

پس جم ۴۵° = جیب ۴۵° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و ظم ۴۵° = ظل ۴۵° = $\frac{\text{جب ۴۵°}}{\text{جم ۴۵°}}$ = ۱

و قل ۴۵° = قطم ۴۵° = ۱ : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $\sqrt{2}$

وچون از روی دستورهای هندسی اضلاع بعضی اشکال منتظمه را استخراج کنیم میتوان بطریق مذکور خطوط مثلثاتی چند قوس دیگر را مشخص نمود

۱۸ همچنین هم دستورهای (۱) و (۲) .... تا (۵) را مخصوصاً در مقامی استعمال کنیم که جیب یا جیب تمام قوسی معلوم باشد و بخواهیم سایر خطوط مثلثاتی آن قوس را استخراج کنیم ولی از همین دستورها میتوان چند دستور دیگر استنباط نمود که بکار آیند در مقامیکه عوض جیب یا جیب تمام خط مثلثاتی دیگر معلوم باشد

مثلاً میخواهیم مقدار جیب و جیب تمام را بحسب ظل بدانیم

رجوع میکنیم بدستور (۱) و (۲) که اینها باشند

جیب² س + جم² س = ۱ و ظل س = $\frac{\text{جب س}}{\text{جم س}}$

وطرفین دستور دویم را مجذور میکنیم این مساوات نتیجه میشود ظل² س = $\frac{\text{جب² س}}{\text{جم² س}}$

بعد از رفع مخرج این[3] مساوات در دستور (۱) قرار دهیم اینچنین مساوات بترتیب نتیجه میشود

ظل² س جم² س + جم² س = ۱

جم² س (۱ + ظل² س) = ۱

جم² س = $\frac{1}{\text{۱ + ظل² س}}$

وبالجمله جم س = ± $\frac{1}{\sqrt{\text{۱ + ظل² س}}}$ (۶)

وچون مقدار جم² س بدست آمد این مساوات را قرار میدهیم

[3] مساوات پیت میاید ظل² س جم² س = جب² س وچون معادل جیب² س را از ع

$$\text{حب}^2\,\text{سه} = \text{ظل}^2\,\text{سه}\ \text{حم}^2\,\text{سه} = \frac{\text{ظل}^2\,\text{سه}}{1 + \text{ظل}^2\,\text{سه}}$$

و بنابراین حب سه $= \pm \dfrac{\text{ظل سه}}{\sqrt{1 + \text{ظل}^2\,\text{سه}}}$ (۷)

و چون معادل حب سه و حم سه را از دستور (۶) و (۷) بر گیریم و در دستورها (۳) و (۴) و (۵) قرار دهیم دستورهای دیگر استنباط میشود که بوساطت آنها و از روی ظل سه مقادیر ظل سه و ظم سه و قطم سه را میتوان معلوم کرد

و همچنین بطریق مذکور میتوان از روی دستورهای (۱) و (۲) تا (۵) مقادیر جمیع خطوط مثلثاتی را بحسب قطع ظل و ظل تمام و قطع ظل تمام استخراج نمود ولی اگر استنباط این چند دستور را در عهده متعلمین گذاریم اولی است

۱۹ **تو بر هن** در هر قوس میان ظل و ظل تمامش این رابطه مفیده موجود و محقق است

$$\text{ظل سه} \times \text{ظم سه} = 1 \quad (8)$$

برهان - چون دو دستور (۲) و (۴) را جزو بجزو در همدیگر ضرب کنیم چنین میشود

$$\text{ظل سه}\ \text{ظم سه} = \frac{\text{حب سه}\ \text{حم سه}}{\text{حم سه}\ \text{حب سه}} = 1$$ فهو المطلوب

۲۰ **بقیه تنبیه** - در علم جبر و مقابله مبرهن شده که چون مقادیر منفیه را در اعمال حساب اعتبار کنیم هر مقدار صاحب دو نوع جذر میشود مثال $\sqrt{16} = \pm 4$

و ما نیز در فوق چنین نوشتیم حم سه $= \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{ظل}^2\,\text{سه}}}$

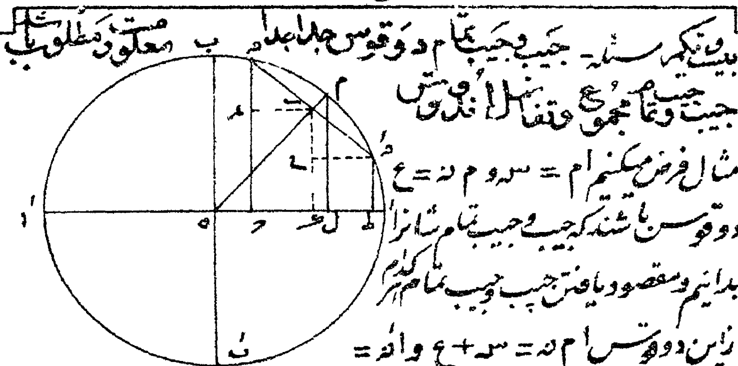
هر دو علامت را قرار دادیم تا آنکه دستور در جمیع حالات بکار آید پس اگر قوس کوچکتر از ۹۰ درجه باشد جیب تمامش مثبت است و علامت + را اختیار میکنیم باین صورت

حم سه $= \dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{ظل}^2\,\text{سه}}}$ و اگر قوس مابین ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه باشد جیب تمامش منفی است و حم سه $= - \dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{ظل}^2\,\text{سه}}}$

و قانون اختیار علامت در هر دستور مضاعف چنین بود که ذکر شد

۲۱

بیست و یکم مسئله جیب و جیب تمام دو قوس جداجدا معلوم است مطلوب است جیب و تمام مجموع و تفاضل آن دو قوس



مثال فرض میکنیم ا م = س و م ن = ع دو قوس باشند که جیب و جیب تمام شان را بدانیم و مقصود یافتن جیب و جیب تمام هر کدام از این دو قوس ا م ن = س + ع و ا ن = س − ع باشد و چون م ل = جیب س و ه ل = حم س و ن ی = حب ع و ه ی = حم ع

حب (س + ع) = ن ح = د ح + ن د = ی ک + ن د

حم (س + ع) = ه ح = ه ک − ح ک = ه ک − د ی

حب (س − ع) = ن ط = ی ک − ی ج = ی ک − ن د

حم (س − ع) = ه ط = ه ک + ک ط = ه ک + ج ن = ه ک + د ی

پس همینقدر کافیست که مقادیر ی ک و ه ک و ن د و د ی را استخراج کنیم تا بتوسط آنها مقدار جیب (س + ع) و حم (س + ع) وغیره مشخص شود

پس بتشابه دو مثلث متساوی الزوایای ه ی ک و ه م ل این تناسب نتیجه شود

ی ک / م ل = ه ی / ه م یا ی ک / حب س = حم ع / ۱ و بنابراین ی ک = حب س حم ع

و دیگر ه ک / ه ل = ه ی / ه م یا ه ک / حم س = حم ع / ۱ و بنابراین ه ک = حم س حم ع

و دو مثلث ن د ی و ه م ل چون اضلاعشان بر همدیگر عمودند متشابه باشند و این تناسب نتیجه شود

ن د / ه ل = ن ی / ه م یا ن د / حم س = حب ع / ۱ و بنابراین ن د = حم س حب ع

و دیگر د ی / م ل = ن ی / ه م یا د ی / حب س = حب ع / ۱ و بنابراین د ی = حب س حب ع

و چون معادل این خطوط ی ک و ه ک و ن د و د ی را در تساویهای سابق بجای مقادیر

جیب (سه+ع) و حم (سه+ع) وغیره قرار دهیم چهار دستور اصلی ذیل استنباط میشود

جیب (سه+ع) = جیب سه حم ع + حم سه جیب ع (۹)

حم (سه+ع) = حم سه حم ع − حب سه حب ع (۱۰)

حب (سه−ع) = حب سه حم ع − حم سه حب ع (۱۱)

حم (سه−ع) = حم سه حم ع + حب سه حب ع (۱۲)

۲۲ بیست و دوم دستورهای مذکور عمومیت دارند و در هر صورت بدو قوس سه و ع تعلق میگیرند اعم از آنکه کوچک باشند یا بزرگ و چون شکل سابق را برای آنحالت خاصی رسم نمودیم که هر کدام از دو قوس سه و ع و مجموعشان سه+ع کوچکتر باشد از ۹۰ درجه بر ما لازمست مبرهن سازیم که هر چند آن دو قوس بزرگ باشند دستورهای مذکور شامل حال آنها هست ولی نظر باینکه از حدی که خود قرار داده ایم خارج نشویم نباید ذکر کنیم جز آنحالات را که هر کدام از دو قوس سه و ع و نیز مجموعشان سه+ع کوچکتر باشد از ۱۸۰ درجه

حالت اول آنست که هر کدام از دو قوس سه و ع و مجموعشان کوچکتر باشد از ۹۰ درجه باینصورت سه < ۹۰° و ع < ۹۰° و سه+ع < ۹۰° اینحالت اصلی است که مبین ساختیم

حالت دویم آنستکه سه < ۹۰° و ع < ۹۰° ولی سه+ع > ۹۰°

پس تمام سه و ع را تا ۹۰ درجه اختیار میکنیم و فرض میکنیم

سه′ = ۹۰ − سه و ع′ = ۹۰° − ع و آنوقت سه′+ع′ = ۱۸۰° − (سه+ع)

پس سه′ و ع′ و مجموع سه′+ع′ هر کدام کوچکتر آمد از ۹۰° و بنابراین دو دستور (۹) و (۱۰) بآنها تعلق میگیرد از اینقرار

(ب) { جیب (سه′+ع′) = جیب سه′ حم ع′ + حم سه′ حب ع′
حم (سه′+ع′) = حم سه′ حم ع′ − جیب سه′ حب ع′ }

حرف (ب) در علامت ... که در این علامت نام دو قوس ... جا بعد قرار داده شده

ولی موافق تعریف جیب سهَ = حم سه و حم سهَ = حب سه و حب عَ = حم ع
و حم عَ = حب ع و علاوه برآن حب (سهَ + عَ) = حب (سه + ع)
و حم (سهَ + عَ) = - حم (سه + ع) پس بعد از آنکه در دو تساوی (۷)
جیب سه را بجای حم سهَ قرار دهیم و ما بقی هرکدام را بجای نظیر خود این ساوی
نتیجه میشود حب (سه + ع) = حم سه حب ع + حب سه حم ع
و این بعینه دستور (۹) است که بدو قوس سه و ع تعلق گرفته و بعد این تساوی نتیجه میشود

- حم (سه + ع) = + حب سه حب ع - حم سه حم ع

و بعد از تغییر علامات این تساوی حم (سه + ع) = حم سه حم ع - حب سه حب ع
و این بعینه دستور (۱۰) است که بدو قوس سه و ع تعلق گرفته
تنبیه چون قوس سه کوچکتر باشد از ۹۰° و قوس ع کوچکتر از ۹۰° ظاهر است که
سه - ع < ۹۰° و بنابراین دو دستور (۱۱) و (۱۲) باندو قوس تعلق میگیرند
حالت سیم - ممکن است اتفاق افتد که تنها یکی از دو قوس بزرگتر باشد از ۹۰ درجه

مثلاً سه > ۹۰° و ع < ۹۰°

پس مکمل سه را تا ۱۸۰ درجه سهَ فرض میکنیم و آنوقت سهَ کوچکتر است از ۹۰°
و بزرگتر است از ع چونکه سه + سهَ = ۱۸۰° و سه + ع < ۱۸۰°
پس هر چهار دستور سابق بدو قوس سهَ و ع تعلق میگیرند چنانچه
جیب (سه + ع) = جیب (۱۸۰° - سهَ + ع) = حب [۱۸۰° - (سهَ - ع)]
= حب (سهَ - ع) = حب سهَ حم ع - حم سهَ حب ع
و چون حب سهَ = حب سه و - حم سهَ = حم سه (۱۴)
پس حب (سه + ع) = حب سه حم ع + حم سه حب ع (استفاده در حاشیه)

وآن بعینه دستور (۱۰) است که بدو قوس سه و ع تعلق گرفته وبعد

حب (سه − ع) = حب (۱۸۰° − سه′ − ع) = حب (سه′ + ع)

= حب سه′ حم ع + حم سه′ حب ع

وچون حب سه را بجای حب سه′ قرار دهیم و − حم سه را بجای حم سه′

این تساوی نتیجه شود حب (سه − ع) = حب سه حم ع − حم سه حب ع

واین بعینه دستور (۱۱) است که بدو قوس سه و ع تعلق گرفته و بهمین نحو عمومیت

دستور (۱۲) را ثابت میکنیم

حالت چهارم درمقام استعمال دستور (۱۱) و (۱۲) ممکن است اتفاق

افتد که سه > ۹۰° و ع > ۹۰°

پس مکمل دو قوس سه و ع را میگیریم وآن سه′ است و ع′ و هرکدام کوچکتر اند از

۹۰ درجه واگر سه بزرگتر باشد از ع سه′ کوچکتر میشود از ع′ و دراینصورت دو دستور

(۱۱) و (۱۲) باین دو قوس سه′ و ع′ تعلق میگیرد

حب (سه − ع) = حب [۱۸۰° − سه′ − (۱۸۰° − ع′)] = حب (ع′ − سه′)

= حب ع′ حم سه′ − حم ع′ حب سه′

وچون جیب سه′ = جیب سه و حم سه′ = − حم سه و حب ع′ = حب ع

وغیره پس حب (سه − ع) = حب سه حم ع − حب ع حم سه

وهکذا حم (سه − ع) = حم [۱۸۰° − سه′ − (۱۸۰° − ع′)] =

= حم (ع′ − سه′) = حم سه′ حم ع′ + حب سه′ حب ع′

یاانکه حم (سه − ع) = حم سه حم ع + حب سه حب ع

پس معلوم شد که دو دستور (۱۱) و (۱۲) دراینحالت نیز بدو قوس سه و ع تعلق

میگیرد و ما جمیع حالاتی را که ممکن است ما بین حدود مشخصه مفروضه عارض شود ذکر نمودیم یعنی
بنابرآنکه س و ع و س + ع هرکدام کوچکتر از ۱۸۰° درجه باشند چهار حالت ممکن
عارض میشود و ما همه را ذکر نمودیم و بنابراین مبرهن گشت که هر چهار دستور با جمیع
قوسهائیکه در حدود معینه مندرج باشند تعلق میگیرد و بلکه باسانی ثابت میشود که
آنها اعم از اندازه‌ای که ما قرار دادیم بوده و دو قوس س و ع هرچند بزرگ باشند با آنها
تعلق میگیرند و ما اینمطلب را در ضمیمه کتاب خیال داریم ذکر کنیم
و حکم عمومیت مختص باین چهار دستور است بلکه هر دستوری که بعمل حساب از آنها استنباط
شود کلیت **مثال** جیب و جیب تمام قوس ۳۰ درجه و ۴۵ درجه معلوم است و مطلوب یافتن
حب (۳۰° + ۴۵°) و حم (۳۰° + ۴۵°) و حب (۴۵° − ۳۰°) و حم (۴۵° − ۳۰°)
مقادیر جیوب و جیوب تمام این دو قوس را در نمره ۱۷ ثبت نموده ایم و بعد از آنکه حب ۷۵°
جیب تمام ۷۵° و جیب ۱۵° و حم ۱۵ درجه را معلوم ساختیم میتوان باین نحو آنها را امتحان نمود
جیب ۷۵ درجه باید مساوی باشد بجیب تمام ۱۵ درجه و جیب تمام ۷۵ درجه مساوی با جیب
۱۵ درجه چونکه ۷۵° + ۱۵° = ۹۰°

۲۳ بیست و سیم مسئله ـ ظل دو قوس جدا جدا معلوم است و مطلوب یافتن ظل مجموع
و ظل تفاضل این دو قوس

$$\text{ظل}\,(\text{س}+\text{ع}) = \frac{\text{حب}\,(\text{س}+\text{ع})}{\text{حم}\,(\text{س}+\text{ع})} = \frac{\text{حب س حم ع} + \text{حم س حب ع}}{\text{حم س حم ع} - \text{حب س حب ع}}$$

و چون باید عوض حب س و غیره ظل س و ظل ع را درج نمود هر کدام از جزهای صورت
و مخرج کسر اخیر را بر حم س حم ع قسمت میکنیم تا این تساوی نتیجه شود

$$\text{ظل}\,(\text{س}+\text{ع}) = \frac{\dfrac{\text{حب س حم ع}}{\text{حم س حم ع}} + \dfrac{\text{حم س حب ع}}{\text{حم س حم ع}}}{\dfrac{\text{حم س حم ع}}{\text{حم س حم ع}} - \dfrac{\text{حب س حب ع}}{\text{حم س حم ع}}}$$

ولی $\frac{\text{حب سه}}{\text{حم سه}}$ = ظل سه و $\frac{\text{حب ع}}{\text{حم ع}}$ = ظل ع پس بعد از تبدیل و تحویل جیبها چنین میشود

$$\text{ظل}(\text{سه}+\text{ع}) = \frac{\text{ظل سه} + \text{ظل ع}}{۱ - \text{ظل سه ظل ع}} \qquad (۱۳)$$

و بهمان نحو این تساوی

$$\text{ظل}(\text{سه}-\text{ع}) = \frac{\text{ظل سه} - \text{ظل ع}}{۱ + \text{ظل سه ظل ع}} \qquad (۱۴)$$

۲۴ بیست و چهارم در قاعده یافتن مقدار حب ۲ سه و حم ۲ سه و ظل ۲ سه.

در مقام استخراج دستورهای (۹) و (۱۰) و (۱۳) امتیازی میان سه و ع قرار ندادیم و ممکن است این دو قوس متساوی شوند پس فرض میکنیم سه = ع

و بعد برای استخراج مقدار جیب ۲ سه در دستور (۹) عوض ع قوس سه را قرار میدهیم پس آن دستور را اینجا نقل میکنیم

$$\text{جیب}(\text{سه}+\text{ع}) = \text{حب سه حم ع} + \text{حم سه حب ع}$$

و بعد از آن تصرف چنین میشود

$$\text{حب ۲ سه} = ۲\ \text{حب سه حم سه} \qquad (۱۵)$$

و همچنین چون در دستور ذیل عوض ع قوس سه را قرار دهیم حم ۲ سه معلوم میشود

$$\text{حم}(\text{سه}+\text{ع}) = \text{حم سه حم ع} - \text{حب سه حب ع}$$

و بعد

$$\text{حم ۲ سه} = \text{حم}^{۲}\ \text{سه} - \text{حب}^{۲}\ \text{سه} \qquad (۱۶)$$

و چون در این دستور $\text{ظل}(\text{سه}+\text{ع}) = \frac{\text{ظل سه} + \text{ظل ع}}{۱ - \text{ظل سه ظل ع}}$

عوض ع قوس سه را قرار دهیم ظل ۲ سه باین طور استنباط شود

$$\text{ظل ۲ سه} = \frac{۲\ \text{ظل سه}}{۱ - \text{ظل}^{۲}\ \text{سه}} \qquad (۱۷)$$

۲۵ بیست و پنجم مسئله - حم سه معلوم است و مطلوب باشد حب $\frac{\text{سه}}{۲}$ و حم $\frac{\text{سه}}{۲}$

در دستور (۱۶) یعنی $\text{حم ۲ سه} = \text{حم}^{۲}\ \text{سه} - \text{حب}^{۲}\ \text{سه}$ عوض سه قوس $\frac{\text{سه}}{۲}$ را قرار میدهیم چنین میشود

$$\text{حم سه} = \text{حم}^{۲}\ \frac{\text{سه}}{۲} - \text{حب}^{۲}\ \frac{\text{سه}}{۲} \qquad (۱۸)$$

و چنین

وچون در این تساوی هر دو جمله حم $\frac{\text{سه}}{۲}$ و جیب $\frac{\text{سه}}{۲}$ مجهول است باید تساوی دیگر بدست آوریم و با آن ترکیب نمود پس دستور (۱) را در قوس $\frac{\text{سه}}{۲}$ جاری میکنیم

وانیجا نقاش میکنیم $۱ = \text{حم}^{۲}\frac{\text{سه}}{۲} + \text{جیب}^{۲}\frac{\text{سه}}{۲}$ (ب)

حال این دو تساوی (۱۸) و (ب) را جزو بجزو با همدیگر جمع میکنیم چنین میشود

$$۱ + \text{حم سه} = ۲\,\text{حم}^{۲}\frac{\text{سه}}{۲} \qquad (\text{م})$$

وبعد از آن $\text{حم}^{۲}\frac{\text{سه}}{۲} = \frac{۱ + \text{حم سه}}{۲}$

وبالجمله $\text{حم}\frac{\text{سه}}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ + \text{حم سه}}{۲}}$ (۱۹)

وچون تساوی (۱۸) را از تساوی (ب) تفریق کنیم چنین میشود

$$۱ - \text{حم سه} = ۲\,\text{جیب}^{۲}\frac{\text{سه}}{۲} \qquad (\text{ن})$$

وبعد چنین $\text{جب}^{۲}\frac{\text{سه}}{۲} = \frac{۱ - \text{حم سه}}{۲}$

وبالجمله $\text{جب}\frac{\text{سه}}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ - \text{حم سه}}{۲}}$ (۲۰)

وبنابر آنچه در ف ۲۰ ذکر شد هر دو علامت ± را برسر جذر قرار دادیم ولی این دستورها را هر وقت بخواهیم در حل مثلثات استعمال کنیم با علامت + اعتبار میکنیم چونکه آنوقت قوس سه کوچکتر از ۱۸۰ درجه است و بنابر این نصفش کوچکتر از ۹۰ درجه و جیب و جیب تمامش هر دو مثبت میشوند نه منفی

۲۶ بیست و ششم - بقیه - چون در دستور $\text{جب}\,۲\,\text{سه} = ۲\,\text{جیب سه حم سه}$ عوض سه نصف سه را قرار دهیم این تساوی نتیجه میشود

$$\text{جیب سه} = ۲\,\text{جب}\frac{\text{سه}}{۲}\,\text{حم}\frac{\text{سه}}{۲} \qquad (\text{۲۵ مکرر})$$

وآنرا با این دستور $\text{جیب}^{۲}\frac{\text{سه}}{۲} + \text{حم}^{۲}\frac{\text{سه}}{۲} = ۱$ ترکیب کنیم مقدار $\text{جب}\frac{\text{سه}}{۲}$ و $\text{حم}\frac{\text{سه}}{۲}$ از روی جیب سه استخراج شود

۲۷ بیست و هفتم مسئله- مقدار ظل سه معلوم ست و مطلوب باشد ظل $\frac{\text{سه}}{۲}$

در دستور (۱۷) یعنی $\text{ظل } ۲ \text{ سه} = \frac{۲ \text{ ظل سه}}{۱ - \text{ظل}^۲ \text{ سه}}$ عوض قوس سه نصف آنرا قرار میدهیم چنین میشود

$$\text{ظل سه} = \frac{۲ \text{ ظل } \frac{\text{سه}}{۲}}{۱ - \text{ظل}^۲ \frac{\text{سه}}{۲}}$$

وچون مجهول و مطلوب ظل $\frac{\text{سه}}{۲}$ است من باب اختصار کتابت آنرا مل فرض میکنیم و مقدار معلوم ظل سه را ح و تساوی چنین میشود

$$\text{ح} = \frac{۲ \text{ مل}}{۱ - \text{مل}^۲}$$

این تساوی از درجه دویم است و بعد از رفع مخرج چنین میشود

$$\text{ح} - \text{ح مل}^۲ = ۲ \text{ مل}$$

و بعد از ان $\text{ح مل}^۲ + ۲ \text{ مل} - \text{ح} = ۰$ و با لجمله $\text{مل}^۲ + \frac{۲}{\text{ح}} \text{ مل} - ۱ = ۰$

و چون بقواعد جبر و مقابله آنرا حل کنیم جواب چنین میشود

$$\text{مل} = -\frac{۱}{\text{ح}} \pm \sqrt{۱ + \frac{۱}{\text{ح}^۲}} \quad \text{یا} \quad \text{مل} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + \text{ح}^۲}}{\text{ح}}$$

و حال ظل $\frac{\text{سه}}{۲}$ را بجای مل قرار میدهیم و ظل سه را بجای ح و آنوقت

$$\text{ظل } \frac{\text{سه}}{۲} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + \text{ظل}^۲ \text{ سه}}}{\text{ظل سه}} \qquad (۴۱)$$

در این دستور نیز هر دو علامت درج شده ولی اگر قوس سه کوچکتر باشد از ۱۸۰ و بنا بر این نصفش کوچکتر از ۹۰ درجه باید جذر مثبت را اختیار نمود یعنی ضلع ~ را با علامت +

۲۸ بیست و هشتم مسئله- درجات دو قوس معلوم ست و مطلوب باشد تعیین مجموع دو جیب و مجموع دو جیب تمام انها بعمل الکاریتم

چون قواعد لگاریتم جز در ضرب و قسمت و در امثال آن جاری نشود مقصود ما آنست که عمل جمع دو جیب یا دو جیب تمام را بعمل ضرب مبدل کنیم یعنی مجموع آید و خط متناسبتی را

بعد ضرب

بعمل ضرب استخراج کنیم تا قواعد لگاریتم با آن تعلق گیرد
پس دو دستور (۹) و (۱۱) را جمع میکنیم و دو دستور (۱۵) و (۱۲) را جدا تا جزو
دویم تساوی میزان بحاصل ضربی مبدل شود
و من باب تسهیل مطلب فرض میکنیم که مقصود آنستکه بعمل لگاریتم معلوم کنیم مقدار جیب
صه + جیب قه را و دو قوس مثل سه و ع چنان اختیار میکنیم که

صه = سه + ع و قه = سه − ع پس

حب صه = حب (سه + ع) = حب سه حم ع + حم سه حب ع

حب قه = حب (سه − ع) = حب سه حم ع − حم سه حب ع

و چون هر دو را جمع کنیم این تساوی نتیجه میشود

حب صه + حب قه = ۲ حب سه حم ع

و چون بفرض ما صه = سه + ع و قه = سه − ع بعد از جمع این دو تساوی
صه + قه = ۲ سه و سه = $\frac{\text{صه + قه}}{۲}$ و بعد از تفریق صه − قه = ۲ ع و
ع = $\frac{\text{صه − قه}}{۲}$ حال در تساوی فوق بجای سه و ع معادل آنها را قرار میدهیم چنین میشود

حب صه + جیب قه = ۲ جیب $\frac{1}{2}$(صه + قه) حم $\frac{1}{2}$(صه − قه) (۲۲)

و ظاهر است که از روی این دستور میتوان بعمل لگاریتم مقدار مجموع دو جیب را معلوم نمود
رجوع کنید بمثال ب ۳۰

۲۹ بیست و نهم حال چون جیب قه را از جیب صه تفریق کنیم این تساوی نتیجه میشود

حب صه − حب قه = ۲ حم سه حب ع

و بعد از آنکه بجای سه و ع معادلشان را قرار دهیم چنین میشود

حب صه − حب قه = ۲ حم $\frac{1}{2}$ (صه + قه) حب $\frac{1}{2}$ (صه − قه) (۲۳)

بهمین وجه میتوان رسید بدستوریکه از روی مقدار مجموع حم صه + حم قه استخراج شود
پس فرض سابق را اینجا نقل میکنیم صه = سه + ع و قه = سه − ع واین دو تساوی را ترتیب میدهیم

حم صه = حم (سه + ع) = حم سه حم ع − حب سه حب ع

حم قه = حم (سه − ع) = حم سه حم ع + حب سه حب ع

و بعد از جمع چنین میشود

حم صه + حم قه = ۲ حم سه حم ع یا آنکه

حم صه + حم قه = ۲ حم ½ (صه + قه) حم ½ (صه − قه) (۲۴)

و چون حم صه را از حم قه تفریق کنیم این تساوی نتیجه میشود

حم قه − حم صه = ۲ حب سه حب ع یا آنکه

حم قه − حم صه = ۲ حب ½ (صه + قه) حب ½ (صه − قه) (۲۵)

چنین بود دستوراتیکه از روی آنها میتوان مقدار مجموع و مقدار تفاضل دو جیب و دو جیب تمام را بعمل لگاریتم معلوم نمود

۳۰ مسئلهٔ اول مثال میخواهیم بلگاریتم مقدار حب °۵۴ + حب °۲۴ را معلوم کنیم

اینجا صه = °۵۴ , قه = °۲۴ و از دستور (۲۲) این تساوی نتیجه میشود

حب °۵۴ + حب °۲۴ = ۲ جیب ½ (°۵۴ + °۲۴) حم ½ (°۵۴ − °۲۴)

یا آنکه حب °۵۴ + حب °۲۴ = ۲ حب °۳۹ حم °۱۵

و همچنین حب °۵۴ − حب °۲۴ = ۲ حم °۳۹ حب °۱۵

و حم °۵۴ + حم °۲۴ = ۲ حم °۳۹ حم °۱۵

و حم °۵۴ − حم °۲۴ = ۲ حب °۳۹ حب °۱۵

۳۱ مسئلهٔ یکم میتوان نیز مقدار مجموع جیب و جیب تمامی یا مقدار تفاضل آندو را بعمل لگاریتم

آسان بدست آورد .

مثال جیب ٣٤ + حم ٦٢ پس تمام ٦٢ درجه را تا ٩٠ میکنیم ٢٨ درجه است

و حم ٦٢ = حب ٢٨ پس

حب ٣٤ + حم ٦٢ = حب ٣٤ + حب ٢٨ = ٢ حب ٣١ حم ٣

مقدار مجموع دو ظل را نیز میتوان بعمل لگاریتم معین کرد از اینقرار

ظل ص + ظل ه = حب ص / حم ص + حب ه / حم ه = (حب ص حم ه + حم ص حب ه) / (حم ص حم ه)

= حب (ص + ه) / (حم ص حم ه)   (٢٦)

و هکذا   ظل ص − ظل ه = حب (ص − ه) / (حم ص حم ه)   (٢٧)

٣٢ مبحث فی دوم - چون دستور (٢٢) را بر دستور (٢٣) قسمت کنیم دستوری دیگر نتیجه میشود که در حل مثلثات بکار آید

(حب ص + حب ه) / (حب ص − حب ه) = ٢ حب ½(ص + ه) حم ½(ص − ه) / ٢ حم ½(ص + ه) حب ½(ص − ه)   (ب)

ولی حب ½(ص + ه) / حم ½(ص + ه) = ظل ½ (ص + ه)   و همچنین

حم ½(ص − ه) / حب ½(ص − ه) = ظم ½ (ص − ه) = ١ / ظل ½(ص − ه)

و چون این معادلات را در مساوی (ب) قرار دهیم این دستور نتیجه میشود .....

٣٣ مبحث فی سیم - در شرح جداول مثلثاتی - متاخرین از مهندسین بعد از وضع لگاریتم جمیع اعمالی را که در حل مثلثات مقتضی باشند بقواعد لگاریتم مجری دارند پس بجای ول لگاریتم اعداد رسمی که در علم حساب شرح داده شد جداولی در لگاریتم خطوط مثلثاتی ملحق نمایند تا قیف ضرورت معطل نمانند و در اکثر چنین جداول لگاریتم جیوب و جیوب تمام و اظلال و اظلال تمام قسی را از قوس ۰ ثانیه ابتدا کنند و ١٠ ثانیه به ١٠ ثانیه ضبط کنند و اکنون مقصود ما بیان قاعده ترتیب این جداول است

در قاعده ترتیب جداول مثلثاتی بطریق اختصار

۳۴ سعی و برهان — قبل از استخراج لکاریتم خطوط مثلثاتی باید استخراج کنیم مقادیر خود خطوط را بازاء قسی مختلفه که در جدول مندرج شده یعنی بازاء جمیع قوسهائیکه ۱۰ ثانیه به ۱۰ ثانیه ضبط شده باشند ابتدا از قوس ۱۰ ثانیه

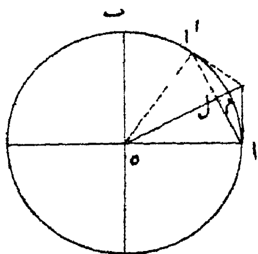
چون نصف قطر را واحد فرض نموده‌ایم طول قوس ۱۰ ثانیه از قرار تفصیل ذیل با آسانی معلوم میشود مقدار نصف محیط یعنی طول قوس ۱۸۰ درجه = π و بنا براین

$$1^\circ = \frac{\pi}{۱۸۰} \quad و \quad 1' = \frac{\pi}{۶۰\times۱۸۰} = \frac{\pi}{۱۰۸۰۰} \quad و \quad 1'' = \frac{\pi}{۶۴۸۰۰۰}$$

$$و \quad ۱۰'' = \frac{\pi}{۶۴۸۰۰} = ۰٫۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۱۱۰$$

و چون طول قوس ۱۰ ثانیه معلوم شد جیبش را بنا بر احکام ذیل میتوان بدست آورد

۳۵ سعی و حکم — هر قوس که از ربع محیط کمتر باشد طولش اطول است از جیب خود و اقصر از ظل خود



مثلا در قوس ام جیب و ظلش را بوضعی که در شکل دیده میشود رسم میکنیم جیبش ال است و ظلش اع و خط ال را امتداد میدهیم تا محیط را بر نقطه ا' قطع کند و دو خط ا'ع و ه ا' را وصل میکنیم آنوقت طول جیب و طول قوس و ظل برسه مضاعف میشوند چونکه شکل ه ا'ع ل را اگر بوهم حول محور ه ع دوران دهیم منطبق شود بر ه اع ل

پس قوس ام را سه فرض میکنیم آنوقت ال ا' = ۲ حب سه

و ام ا' = ۲ سه و اع ا' = ۲ ظل سه

و ظاهر است که خط ال ا' اقصر است از قوس ام ا' که منتهی شده است بطرفین الخط

واین قوس اقصراست ازخط منکسراء ا که برآن حاطه کرده و هردو بطرفین خط اول منتهی شده یعنی ۲ جیب سه اقصراست از ۲ سه واین قوس اقصراست از ۲ ظل سه پس جیب سه < سه < ظل سه فهو المطلوب.

۳۶ ثبتی ششم. هرگاه در قوس بسیار کوچکی طول آن قوس را عوض طول جیبش اختیار کنیم مقدار تقریب متعلقی که باینواسطه در نتیجه عمل واقع میشود بسیار قلیل است و هرچند قوس کوچکتر باشد تقریب کمتر است

زیرا که چون اجزای این نامساوات را جیب سه < سه < ظل سه

برجیب سه قسمت کنیم این نامساوات دیگر نتیجه میشود ۱ < $\frac{\text{سه}}{\text{جیب سه}}$ < $\frac{1}{\text{جتم سه}}$

(چونکه ظل سه = $\frac{\text{جیب سه}}{\text{جتم سه}}$)

چون قوس سه بتدریج تغییر کند بطوریکه اختلافش محسوس نشود جتم سه نیز همچنان تغییر کند (رجوع کنید بشکل) و آنوقت $\frac{1}{\text{جتم سه}}$ نیز باختلاف قلیل متغیر شود و هرگاه قوس سه صفر باشد جتم سه = ۱ و بنابراین $\frac{1}{\text{جتم سه}}$ = ۱ پس اگر قوس سه بسیار کوچک باشد تفاضل مابین $\frac{1}{\text{جتم سه}}$ و ۱ بسیار قلیل میشود و موافق نامساوات فوق تفاضل مابین $\frac{\text{سه}}{\text{جیب سه}}$ و ۱ بسیار قلیل از آن و بعبارت اخری هرگاه قوس سه بسیار کوچک باشد مقدار $\frac{\text{سه}}{\text{جیب سه}}$ − ۱ بسیار قلیل میشود و آن معادلست با $\frac{\text{سه} - \text{جیب سه}}{\text{جیب سه}}$ و آنجمله تقریب متعلقی است که در استعمال قوس سه بجای جیب سه واقع میشود پس مقصود باثبوت رسید از حکم مذکور چنین استنباط شد که باید مبدا از قوس بسیار کوچکی گرفت مثل قوس ۱۰ ثانیه تا بتوان طول خود قوس را در عوض جیب استعمال نمود و مقدار تقریب متعلق محسوس نشود ولی باید اول حد اینمقدار را بتحقیق معلوم کرد تا اختیار قوس مبدا از روی بصیرت باشد و قاعده تعیین آن مبنی است بر حکم ذیل

۳۷ مسئلهٔ هفتم - هر قوس که از ربع محیط اقصر باشد تفاضلش با جیب خود اقصر است از ربع مکعب خود آن قوس

با این صورت $\text{س} - \text{حب}\,\text{س} < \frac{\text{س}^{3}}{4}$

زیرا که چون $\frac{\text{س}}{2} < \text{ظل}\,\frac{\text{س}}{2}$ یا آنکه $\frac{\text{س}}{2} < \frac{\text{حب}\,\frac{\text{س}}{2}}{\text{حم}\,\frac{\text{س}}{2}}$

طرفین را در مخرج ضرب میکنیم چنین میشود $\frac{\text{س}}{2}\,.\,\text{حم}\,\frac{\text{س}}{2} < \text{حب}\,\frac{\text{س}}{2}$

و بعد ضرب میکنیم در $2\,\text{حم}\,\frac{\text{س}}{2}$ چنین میشود

$\text{س}\,\text{حم}^{2}\frac{\text{س}}{2} < 2\,\text{حب}\,\frac{\text{س}}{2}\,\text{حم}\,\frac{\text{س}}{2} = \text{حب}\,\text{س}$ (بنابر دستور ۲۰ مکرر)

و در این مساوات $1 - \text{حب}^{2}\frac{\text{س}}{2}$ را بجای $\text{حم}^{2}\frac{\text{س}}{2}$ قرار میدهیم چنین میشود

$$\text{س}\left(1 - \text{حب}^{2}\frac{\text{س}}{2}\right) < \text{حب}\,\text{س}$$

ولی چون قوس $\frac{\text{س}}{2}$ اعظم است از جیب $\frac{\text{س}}{2}$ پس $\frac{\text{س}^{2}}{4}$ نیز اعظم میشود از جیب$^{2}\,\frac{\text{س}}{2}$

و بعد از آنکه در این مساوات فوق بجای جیب$^{2}\,\frac{\text{س}}{2}$ مقدار $\frac{\text{س}^{2}}{4}$ را که اعظم از اوست قرار دهیم تفریق کنیم باقی کمتر میشود و بطریق اولی $\text{س}\left(1 - \frac{\text{س}^{2}}{4}\right) < \text{حب}\,\text{س}$

یا آنکه $\text{س} - \frac{\text{س}^{3}}{4} < \text{حب}\,\text{س}$

و بعد از تصرف جزئی $\text{س} - \text{حب}\,\text{س} < \frac{\text{س}^{3}}{4}$ فهو المطلوب

۳۸ مسئلهٔ هشتم - حکم مذکور را در قوس ۱۰ ثانیه جاری میکنیم و طول این قوس را در (۳۴) معلوم کرده ایم قوس $10'' = 0{,}0000484813681110 < 0{,}00005$

$(\text{قوس}\;10'')^{3} < 0{,}000000000000125$

$\frac{(\text{قوس}\;10'')^{3}}{4} < 0{,}00000000000000032$

پس قوس $10''$ - جیب $10'' < 0{,}00000000000000032$

و بنابراین چون قوس ۱۰" را در عوض جیبش استعمال کنیم تقریب عمل یعنی مقدار اختلاف

کوچکتر میشود از یکی احاد اعشار از مرتبه هفدهم و از همین نامساوات معلوم میشود که طول قوس و مقدار جیبش در ۱۲ رقم اول اعشار مشارکند زیرا که

قوس ۱۰ = ...۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۱۱۰

قوس ۱۰ − جیب ۱۰ > ...۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۲

و بعد از تفریق جیب ۱۰ > ...۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۰۷۸

حال ما دو مقدار بدست آورده ایم که یکی بزرگتر است از جیب ۱۰ و آن قوس ۱۰ است و دیگر کوچکتر از آن جیب و ظاهر است که ارقام مشترکه در این دو حد باید جزء مقدار حقیقی جیب ۱۰ باشد و عدد آن ارقام ۱۲ است و لهذا جیب ۱۰ را چنین بدست میآریم

جب ۱۰ = ۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸

۳۹ سی و نهم چون جیب ۱۰ معلوم شد جیب تمامش از روی این دستور مشخص میشود

$$\text{جب}^2\ ۱۰ + \text{جم}^2\ ۱۰ = ۱ \quad \text{و بنابراین} \quad \text{جم}\ ۱۰ = \sqrt{۱ - \text{جب}^2\ ۱۰}$$

و اما در قوسهای دیگر ۲۰ ۳۰ ۴۰ ۵۰ و ۶۰ که یکدرجه شد و غیره بترتیب استعمال میکنیم دستورهایی که متعلق باشند به جیب ۲س و جم ۲س و جب (س+ع) و جم (س+ع) زیرا که ۲۰ = ۱۰ × ۲ و ۳۰ = ۲۰ + ۱۰ و ۴۰ = ۲ × ۲۰ و ۵۰ = ۴۰ + ۱۰ و ۶۰ = ۲ × ۳۰ و همچنین در ما بقی

۴۰ چهلم چون خطوط مثلثاتی قوسها را ۱۰ به ۱۰ تا ۴۵ درجه استخراج کنیم باید ابتدا توقف نمائیم و تجاوز نکنیم چون جیوب و جیوب تمام قوسهای واقعه مابین ۴۵ درجه و ۹۰ درجه ضمناً بدست آمده اند زیرا که خطوط مثلثاتی قوسهای واقعه مابین ۴۵ درجه و ۹۰ درجه را استنباط میکنیم از خطوط مثلثاتی متممات آنها که مندرجند مابین ۴۵ درجه و صفر مثلاً جیب ۵۸ ۱۰ معادل است با جیب تمام ۳۱ ۵۰ که سابق استخراج شده و جیب تمام ۵۸

۱۵ یعنی جب ۱۳۰ جب ۱۵۰ است و اما در قوسهایکه از ۹۰ درجه تجاوز کرده باشند چون هر
کدام مکمل قوسی است کمتر از ۹۰ درجه خطوط مثلثاتی آنها بحسب مقدار متحدند با خطوط مثلثاتی
قوسهای مکمل شان و بحسب علامت بعضی متحد باشند و بعضی مختلف رجوع کنید به ب ۱۴

۴۱ چهل و یکم خطوط مثلثاتی قوسهائی را که ۱۵ آ به ۱۵ آ ترقی کنند تا چهل و نه درجه میتوانیم آسان تر و
زودتر استخراج کنیم از روی دو دستوری که حال مقرر میکنیم

چون دو دستور ۹ و ۱۱ را جداگانه جمع کنیم و همچنین دو دستور ۱۰ و ۱۲ را این دو دستوری ب صحیح میشود

جب (س+ع) + جب (س−ع) = ۲ جب س جم ع

جم (س+ع) + جم (س−ع) = ۲ جم س جم ع

و از روی آنها این دو تساوی

جب (س+ع) = ۲ جب س جم ع − جب (س−ع)

جم (س+ع) = ۲ جم س جم ع − جم (س−ع)

و چون فرض کنیم س = م ع آنوقت (س−ع) = (م−۱) ع

و س+ع = (م+۱) ع

حال معادلات س−ع و س و س+ع را چنانچه یافتیم در دو تساوی فوق قرار
میدهیم تا این دو دستور کلی حاصل شود

جب (م+۱) ع = ۲ جم ع جب م ع − جب (م−۱) ع (۲۹)

جم (م+۱) ع = ۲ جم ع جم م ع − جم (م−۱) ع (۳۰)

جمیع قوسهایکه مقصود استخراج جیوب و جیوب تمام آنها است چون جمله های یک
تصاعد عددی هستند که قدر نسبتش ۱۵ آ باشد و هر جمله مضربی است از ۱۵ آ و در طرف
مقابل س−ع و س و س+ع تصاعدی است عددی که قدر نسبتش ع باشد ما س را

معادل م ۴ فرض نمودیم یعنی مضرب ۴ و ۴ را مساوی ۱۰ گرفتیم تا دو دستور ۲۹ و ۳۰ بکار آیند در استخراج جیوب و جیوب تمام قوسهائیکه ابتدا از ۱۰ بتفاضل ۱۰ ترقی کنند و در مقام عمل باید م را بتدریج ۱ و ۲ و ۳ و ۴ .... گرفت پس بعد از اینمقدمات چون فرض کنیم

م = ۱ { حب ۲۰ = ۲ حم ۱۰ حب ۱۰
حم ۲۰ = ۲ حم ۱۰ حم ۱۰ − حم ۰ = ۲ حم² ۱۰ − ۱ }

م = ۲ { حب ۳۰ = ۲ حم ۱۰ حب ۲۰ − حب ۱۰
حم ۳۰ = ۲ حم ۱۰ حم ۲۰ − حم ۱۰ }

م = ۳ { حب ۴۰ = ۲ حم ۱۰ حب ۳۰ − حب ۲۰
حم ۴۰ = ۲ حم ۱۰ حم ۳۰ − حم ۲۰ }

م = ۴ { حب ۵۰ = ۲ حم ۱۰ حب ۴۰ − حب ۳۰
حم ۵۰ = ۲ حم ۱۰ حم ۴۰ − حم ۳۰ }

و هکذا بعد از آن

و ظاهر است که تمام این اعمال بآسانی صورت می بندد چونکه چندان بسطی ندارند و جیب و جیب تمام هر قوس بوساطت جیب و جیب تمام دو قوس مقدم بر آن قوس معلوم میشود و علاوه بر آن در استخراج هر جیب و جیب تمامی جز یک عمل ضرب و یک تفریق عملی لازم نیست و چون در همه تساویها جمله ۲ حم ۱۰ مضروب فیه مشترک است بعد از آنکه آنرا ۹ مرتبه تضعیف کنیم بنابر آنچه در حساب ذکر شده عمل ضرب مبدل بشود بجمع

۴۲ چهل و دوم در خصوص لگاریتم خطوط مثلثاتی – چون مقادیر عددیه جیوب و جیوب تمام قسی ابتدا از ۱۰ و بتفاضلات ۱۰ تا ۴۵ درجه مشخص شد لگاریتمهای سمی آنها را که غالبا ۱۰ است معلوم نموده در جدولی درج نموده اند

وازروی لکاریتم جیوب وجیوب تمام لکاریتم اظلال واظلال تمام همان قسمی رابوساطت این دو دستور استخراج نموده اند

ظل سه = $\frac{\text{حب سه}}{\text{حم سه}}$ و ظم سه = $\frac{\text{حم سه}}{\text{حب سه}}$

واین دو دستور خود بلکاریتم متبدل میشوند باینصورت

لك ظل سه = لك حب سه − لك حم سه

لك ظم سه = لك حم سه − لك حب سه

وازانیقرار هیچ لازم نیست که خود اظلال واظلال تمام را استخراج کنیم چونکه بوساطت آنها لکاریتمشان بدست می آید ودراعمال غیرالنّز لکاریتم چیزی منظور نباشد

۴۳ تنبیه و بباید دانست که انچه درجدول ضبط شده بعینه لکاریتمهای خطوط مثلثاتی نیستند بهرکدام ۱۰ واحد اضافه شده

سببش انکه چون نصف قطر را واحد طول فرض نموده ایم (نق=۱) جیوب وجیوب تمام جمیعاً کوچکتر میشوند از واحد غیر از جیب ۹۰ درجه وجیب تمام صفر درجه و بنابراین لکاریتم آنها منفی است وهمچنین لکاریتمهای نیمی از اظلال واظلال تمام و ظاهر است که استعمال چنین لکاریتمهای منفی در حساب خالی از عسرت نیست و من باب احتراز از این عیب بر هرکدام ۱۰ واحد اضافه نموده اند و حواصل را در جدول ضبط کرده اند

و بعد از این تصرف جزئی لکاریتمهای خطوط مثلثاتی قوسها از یک ثانیه و بالاتر جمیعاً مثبت گشته اند و بلکه در قوسهای پست تر از ثانیه چنین شده و تا یک جزء از چهل هزار جزء ثانیه لکاریتم خطوط مثلثاتی قوسها بعد از اضافه ۱۰ مثبت است

مثلاً قوس ۱ ثانیه = ۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۱۱۰ ....

حب ۱ ثانیه = ۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۱

لك حس آ + ۱۰ = لك [(حس آ) × ۱۰^۱۰] = لك ۳۶۸ر۱۴۸۱۴۸ = ۴ر......

وازاینقرار حاصل ضرب یکجزء از چهل هزار جزء قوس آ در ۱۰^۱۰ بار از واحد تجاوز میکند پس لگاریتمهای خطوط مثلثاتی چنین قوس بسیار کوچک بعد از اضافه ۱۰ هنوز مثبت است

۴۴ چهل چهارم در ضمن اعمال حساب باید ده واحدی را که بر هر لگاریتم مثلثاتی اضافه نمودیم منظور داشت وقاعده اش ازقراریست که ذکر میشود

قاعده بازاء هر لگاریتم مثلثاتی که از جدول برگیریم ودر حساب اضافی اعتبارش کنیم باید ۱۰ واحد از حاصل جمع تفریق نمود و هرگاه آن لگاریتم نقصانی اعتبار شود باید بکافی آن ۱۰ واحد اضافه نمود وچون لگاریتم خط مثلثاتی را بخواهیم در جدول مقوس کنیم تا زاویه مجهول مشخص شود آنوقت قبل از دخول درجدول ۱۰ واحد بر آن اضافه کنیم وبنابراین هر لگاریتم اضافی چون از جدول برگرفته شد آن ده واحدی که زیاده داشت از آن کاهیده میشود و بازاء هر لگاریتم نقصانیکه از جدول برگرفته شد ده واحد اضافه میشود محض بکافی باده واحد زیادتی که تفریق شده

۴۵ چهل وپنجم استثنا باید از قاعده مذکوره استثنا نمود لگاریتمهای اظلالی راکه محصور باشند مابین ۴۵° و ۹۰° ونیز لگاریتمهای اظلال تمامی راکه محصور باشند مابین صفر درجه و ۴۵ درجه

زیراکه این دو رشته از خطوط مثلثاتی هرکدام اعظم اند از واحد وبنابراین لگاریتمهاشان مثبت اند و هیچوجه اضافه ۱۰ واحد بر آنها لازم نیست چنانچه در جدول نیز بی اضافه ضبط شده اند ولهذا در مقام استعمال لگاریتم این اظلال واظلال تمام از ده واحد را نباید نه اضافه کرد و نه تفریق نمود

وچون بخواهیم که لگاریتم ظل یا ظل تمام قوسی مجهول را درجدول مقوس کنیم نباید

قبل از دخول در جداول بر آن لکاریتم ۱۰ واحد اضافه کرد مگر آنکه بی آن اضافه منفی باشد
تبنیه نظر باین استثنا عمومیت از قاعده کلیه سلب شده و من باب رعایت محافظت
لازمست که در ضمن عمل مابین قوسهای کوچکتر از ۴۵ درجه و قوسهای بزرگتر امتیاز
قرار دهد و بهر کدام را بشناسد و این فقره مایه پریشانی خاطرش میشود و لهذا اگر مناسب دانند
میتوانند بدستور ذیل چشم از آن استثنا بپوشند و در همه حال قاعده کلیه را محفوظ دارند
فرض نمایید که بر جمیع لکاریتمهای مثلثاتی جدول ۱۰ واحد اضافه شده و بر این فرض قاعده
۴۴ را بی استثنا معمول دارید ولی وقت خواندن و نوشتن لکاریتم اظلال قوسهای واقعه
مابین ۴۵ و ۹۰ و لکاریتم اظلال تمام قوسهای واقعه مابین صفر درجه و ۴۵ درجه عوض
مفصل ۰ و ۱ و ... اعداد ۱۰ و ۱۱ و ... را منظور دارید و در این صورت معلومست که
بر جمیع لکاریتمها ۱۰ واحد اضافه شده و هر دو قاعده مازدمی بسان معمول است

در قانون استعمال جداول مثلثاتی

در اعمال متعلقه بحل مثلثات بیشتر جداول هفت رقمی کاله را بکار برند و گاه جداول پنج رقمی لالاند را نیز استعمال کنند

۴۶ چهل و ششم در معرفت جداول کاله - در ابتدای این جداول لکاریتم جیوب و ظلال قسی را ابتدا از یک ثانیه تا ۵ درجه ثانیه بثانیه ضبط نموده و بنا بر این لکاریتم جیوب تمام و اظلال تمام قسی را نیز از ۹۰ تا ۸۵ درجه ثانیه بثانیه ترتیب داده و بعد از آن لکاریتم جیوب و جیوب تمام و اظلال و اظلال تمام قسی را از ۵ تا ۹۰ درجه ثانیه به ۱۰ ثانیه درج نموده

و چون خواهیم در جدول داخل شویم درجاتی را که از ۴۵ کمتر باشد در فوق صفحات طلب کنیم و دقایق و عشرات ثوانی را در دو ستون اول سمت یسار روی هابط

کاله و لالاند دو نفر مهندس معروف فرانسوی بوده اند که جداول لکاریتم ترتیب داده اند

یعنی از فوق بتحت و هرگاه قوس از ۴۵ درجه تجاوز نموده باشد باید درجاتش را
در تحت صفحات طلب کنیم و دقایق و عشرات ثوانی را در ستون آخر بسمت یمین
ولی صاعد یعنی از تحت بفوق و اسامی خطوط مثلثاتی را نیز باید در فوق و در تحت
ستونهای لگاریتم طلب نمود بحسب آنکه قوس کوچکتر باشد یا بزرگتر از ۴۵ درجه
و تفاضل مابین هر دو لگاریتم متوالی جیوب و جیوب تمام را در یمین خود آن لگاریتمها
و فیمابین بزرگتر و کوچکتر ثبت کرده اند و تفاضلات مابین لگاریتمهای ظلال قسمی
متحد باشند با تفاضلات مابین لگاریتمهای ظلال تمام همان قوسها و این تفاضلات
مشترکه را باید طلب نمود مابین دو ستونیکه بعنوان ظل و ظم باشند

برهان آنکه تفاضل مابین لگاریتمهای ظل هر دو قوس مساویست با تفاضل مابین
لگاریتمهای دو ظل تمام آن دو قوس اینست که از دستور ظل سه × ظم سه = ۱
این تساوی نتیجه میشود لل ظل سه + لل ظم سه = ۰
و بازاء قوس سهَ این تساوی لل ظل سهَ + لل ظم سهَ = ۰
و بعد از تفریق تساوی دویم از اول
لل ظل سه − لل ظل سهَ = لل ظم سهَ − لل ظم سه

۴۷ چهل و هفتم بنا بر آنچه ذکر شد اگر قوس مفروض اجزء درجات و دقایق و عشرات
ثوانی چیزی نباشد لگاریتم خطوط مثلثاتیش با کمال سهولت از جدول کاله برگرفته میشود

مثال مطلوب است لل جیب ۲۳ج ۴۸ق ۴۰ث

چون قوس از ۴۵ج کوچکتر است عدد درجاتش را در فوق صفحات طلب میکنیم و بعد
یافتن ۴۸ق را در ستون اول سمت یسار و در جهت نزول و بعد از آن ۴۰ث را
در ستون دویمی که بسمت یمین ستون سابق باشد ولی باید آن چهلی را اختیار نمود

که بلا فصل تحت ۲۸′ ثبت شده و آنوقت در طول خط افقی ۴۰″ و در ستون یکه
بعنوان جیب است لکاریتم مطلوب را طلب میکنیم یعنی باید آن لکاریتم را طلب نمود
در ملتقای ۴۰″ و جیب فوق صفحه وانجا این عدد نوشته شده

لك جیب ۲۳° ۲۸′ ۴۰″ = ۹٫۶۰۰۶۰۲۸

مثال دوم مطلوب است لك حم ۶۳° ۳۵′ ۲۰″

چون قوس بزرگتر است از ۴۵ درجه ۶۳° را در تحت صفحات طلب میکنیم و
بعد از یافتنش ۳۵′ را در ستون آخر سمت یمین ولی در جهت صعود و بعد
ابتدا از ۳۵ دقیقه ۲۰″ را در ستون سمت یسارش ولی در جهت صعود و آنوقت
در طول خط افقی و در سمت یسار ۲۰″ سیر میکنیم تا برسیم بستون لکاریتمی که اسفلش بعنوان
جیب تمام است وانجا این عدد را بر میگیریم

لك حم ۶۳° ۳۵′ ۲۰″ = ۹٫۶۴۸۱۲۳۴

۴۸ چهل و هشتم هرگاه قوس مفروض شامل احاد ثوانی و بلکه اعشار ثوانی باشد
لکاریتم خطوط مثلثاتی را باید بطریق ذیل معلوم نمود

مثال مطلوب است لك جب ۳۲° ۱۹′ ۴۳٫۴″

اول با حاد ثوانی و با عشارش هیچ التفات نکنیم و لکاریتم جیب ۳۲° ۱۹′ ۴۰″ را اخذ کنیم
و بعد از آن بتعدیل ما بین السطرین عمل را اتمام کنیم و مبنای تعدیل اینست که تفاضلات بین لکاریتمها
متناسب فرض میکنیم با تفاضلات ما بین قوسی و اگرچه این فرض بصحت مقرون نیست ولیکن
تقریبش کافیست و دستور العمل از اینقرار است (تنبیهی که اول کتاب در خصوص نوشتن
اعمال ذکر نمودیم در این موارد بکار آید)

لل‌حب ۳۷° ۱۹′ ۴۰″ = ۹٫۷۸۲۷۴۰۶ (تفاضل جدولی ۲۷۶)

بازاء ۳٫۴ ——— ۹۴

لل‌حب ۳۷° ۱۹′ ۴۳٫۴″ = ۹٫۷۸۲۷۵۰۰

۲۷٫۶
۳٫۴
———
۱۱۰۴
۸۲۸
———
۹۳٫۸۴

لل حب ۳۷ ۱۹ ۴۰ = ۹٫۷۸۲۷۴۰۶ این لکاریتم را اول مینویسیم و تفاضل جدولی ۲۷۶ را برمیگیریم و آن ۲۷۶ واحد اعشاریست از آخر مراتب لکاریتم پس عمل تعدیل مابین السطرین را چنین بجا میاوریم که چون تفاضل مابین دو قوس ۱۰ ثانیه باشد تفاضل مابین لکاریتمهای ما بازائش ۲۷۶ میشود پس اگر تفاضل مابین قوسها ۱ ثانیه باشد تفاضل مابین لکاریتمها ۲۷٫۶ واحد میشود و هرگاه تفاضل مابین قوسها ۳٫۴ ثانیه باشد باید تفاضل مابین لکاریتمهای و جیب آن قوسها این باشد ۲۷٫۶ × ۳٫۴ و چون ۳٫۴ ثانیه تفاضلی است که مابین ۳۷ ۱۹ ۴۰ و ۳۷ ۱۹ ۴۳٫۴ موجود میباشد پس حاصل ضرب مذکور تفاضلی است که باید بازاء آن اعتبار نمود و مقدارش در سمت یمین صورت حساب نموده شده ولی باید صحاح حاصل ضرب را بر لکاریتم جدولی اضافه نمود و کسور را حذف کرد یا رفع نمود چنانچه ما ۹۴ افزودیم چونکه رقم اول اعشار حاصل ضرب از ۵ بزرگتر است

۱۴۹ چهل و نهم ـ تنبیه ـ شخص محاسب باید عمل ضرب را در خارج جدکانه مجری دارد بلکه باید از حفظ حاصل را معلوم کند و صورت عمل را هیچ ننویسد و دستورش اینست که مضروب ۲۷٫۶ را که تفاضل جدولی باشد در یمین لکاریتم بنویسد و مضروب فیه ۳٫۴ را در تحت قوس و آنوقت هر حاصل ضرب جزئی را در حافظه معلوم کند و تحت لکاریتم جدولی بنویسد ولی همین آحاد و عشرات و مآت را از اعشار زیرا هیچ منظور نیاورد و اگر رقم اعشار محذوف ۵ باشد یا بزرگتر از ۵ باید آنرا رفع نمود و بر رقم آحاد واحدی اضافه کرد و حال من باب توضیح این مطلب چند مثالی آوریم

مثال اول مطلوبست لل حب ۳۷ ۱۹ ۴۳٫۴

لك جب ۳۲° ۱۹′ ۴۰″ = ۹٫۷۸۲۷۴۰۶ (تفاضل ۲۷۶)

بازاء ۳″ ۸۳

بازاء ۰٫۴ ۱۱

لك جب ۳۲° ۱۹′ ۴۳٫۴″ = ۹٫۷۸۲۷۵۰۰

مثال دوّیم مطلوب لك ظل ۳۱° ۲۹′ ۴۷٫۸″

لك ظل ۳۱° ۲۹′ ۴۰″ = ۹٫۷۸۷۲۲۴۸ (تفاضل ۴۷۳)

بازاء ۷″ ۳۳۱

بازاء ۰٫۸″ ۳۸

لك ظل ۳۱° ۲۹′ ۴۷٫۸″ = ۹٫۷۸۷۲۶۱۷

مثال سیّم مطلوب لك جم ۵۸° ۱۹′ ۴۹″

لك جم ۵۸° ۱۹′ ۵۰″ = ۹٫۷۲۰۱۷۴۱ (تفاضل ۳۴۱)

بازاء ۱″- ۳۴

لك جم ۵۸° ۱۹′ ۴۹″ = ۹٫۷۲۰۱۷۷۵

مثال چهارم مطلوب لك ظم ۶۹° ۴۳′ ۱۷٫۲″

لك ظم ۶۹° ۴۳′ ۲۰″ = ۹٫۵۶۷۵۷۹۶ (تفاضل ۶۴۶)

بازاء ۲″- ۱۲۹

بازاء ۰٫۳″- ۱۹

لك ظم ۶۹° ۴۳′ ۱۷٫۲″ = ۹٫۵۶۷۵۹۴۴

وکسر ۲٫۳″ تفاضل ما بین ۱۷٫۷″ است و ۲۰″

شرح مثال اوّل - چون مقصود از ضرب ۶٫۲۷ در ۳٫۴ تعیین حاصل ضرب آنهاست صورت عمل را ننوشتیم و باین دستور رفتار نمودیم: مضروب فیه جزء ۳ را در یمین نوشتیم و آن (۳) است و مضروب ۲٫۷۶ را در یسار (تفاضل ۲۷۶) و ۳ را در ۶ ضرب کردیم شد ۱۸ رقم ۸ اعشار را ثبت نکردیم و چون اعظم است از ۵ رفع نموده واحدی ۱ مرتبه را اضافه کردیم و محفوظ داشتیم تا بر حاصل ضرب بعد ۲ واحد بیفزائیم و بعد ۳ را

در ۷ ضرب کردیم ۲۱ شد و با ۲ محفوظ ۲۳ ۳ را نوشتیم و ۳ مضروب فیه را
در ۲ ضرب نمودیم شد ۶ با ۲ محفوظ شد ۸ و آنرا در عشرات نوشتیم و در خصوص
۴٫۶ چون تفاضل بازاء ۱ انیست ۲۷٫۶ پس بازاء ۱۰۰ باید این باشد ۲٫۷۶
و بازاء ۴٫۶ این ۲٫۷۶ × ۴ و این عمل را در نظر بجا آوردیم و احاد صحاح حاصل را
در تحت لگاریتم ۹٫۷۸۱۲۴۰۶ نوشتیم و دستور العمل چنین است که بگوئیم ۴ در ۶ :
۲۴ ۲۰ بر ۲ و ۴ در ۷ : ۲۸ و ۲ : ۳۰ و مانند ۴ را نوشتیم نه صفر را بلکه ۳۰ را
۳ محفوظ داشتیم و بعد ۴ در ۲ : ۸ و ۳ : ۱۱ انرا نوشتیم و در سایر مسائل نیز چنین
کردیم و بعضی اعشار حواصل جزء را که مینویسند ولی در میزان بندی حذف میکنند

۵۰ پنجاهم تنبیه چون خواهیم لگاریتم جیب تمام یا ظل تمام قوسی را از جدول بگیریم قاعده
انست که قوس بلا فصل بیشتر از انرا در جدول طلب کنیم و لگاریتم جیب تمام یا
ظل تمام چنین قوس بزرگتر را بیرون آوریم و بعد فضل آنرا بر قوس مفروض معلوم کنیم و باقی
عمل را بر وفق انچه در خصوص جیب و ظل بنظر رسید مجری داریم تا لگاریتم تمام بدست اید
و نکته این تصرف جزئی آنست که چون قوس نقصان پذیرد جیب تمام و ظل تمامش بیفزاید
پس اگر بخواهیم که در تعدیل لگاریتم جدولی جز جمع عملی مجری نشود باید البته بعنوان قوس بزرگتر
از قوس مفروض در جدول داخل شویم و بعد از اجرای جمع نقوس اصلی باز رسید

۵۱ پنجاه و یکم و حال مشغول میشویم بحل عکس مسئله مذکوره
مسئله لگاریتم یکی از خطوط مثلثاتی قوسی معلوم است و میخواهیم از روی جداول
ان قوس را بر گیریم

مثال لگ جیب مل = ۹٫۶۳۰۵۸۲۱

و باید مقدار مل را معلوم کرد و صورت عمل چنانست که دیده میشود

لك جیب مل = ۹٫۶۳۰۵۸۲۱

بازاء ۹٫۶۳۰۵۶۸۹ ۲۵° ۱۲′ ۱۰″ (تفاضل ۴۴۶)

بازاء ۱۳۲ ۲٫۹″

مل = ۲۵° ۱۲′ ۱۲٫۹″

۱۳۲۰ | ۴۴۶ / ۲٫۹
۴۲۸۰
۳۶۶

شرح عمل — در جدول داخل میشویم و میان لگاریتمهای جیوب لگاریتمی طلب میکنیم که کمتر باشد از لگاریتم مفروض ولی کمال قرب بان داشته باشد و آن ۹٫۶۳۰۵۶۸۹ است و قوس بازائش این ۲۵° ۱۲′ ۱۰″ پس این لگاریتم را از لگاریتم مفروض تفریق میکنیم باقی میماند ۱۳۲ و تفاضل جدولی مابین لگاریتم جیبی که برگرفتیم و تالیش را نقل میکنیم اینست ۴۴۶ و حال تعدیل مابین السطرین چون تفاضل مابین دو لگاریتم مقدار ۴۴۶ واحد اعشار از مرتبهٔ اخیر باشد اختلاف مابین دو قوس آنها که ۲۵° ۱۲′ ۱۰″ و ۲۵° ۱۲′ ۲۰″ باشند ۱۰″ است و بنابراین اگر اختلاف مابین دو لگاریتم واحد باشد تفاضل مابین دو قوس این $\frac{۱۰″}{۴۴۶}$ میشود و اگر اختلاف مابین لگاریتم جیب ۲۵° ۱۲′ ۱۰″ و لگاریتم جیب قوس مجهول ۱۳۲ باشد باید تفاضل مابین دو قوس بازاء آن این باشد $\frac{۱۳۲ \times ۱۰″}{۴۴۶}$ و ما حساب این کسر را تا عشر ثانیه در کنار بجا آوردیم خارج قسمت ۲٫۹″ شد و آنرا بر ۲۵° ۱۲′ ۱۰″ اضافه کردیم قوس مطلوب بدست آمد

و بر محاسب لازمست که این عمل قسمت جزئی را در ذهن مجری دارد چنانچه حال بنظر میرسد

لك حب مل = ۹٫۶۳۰۵۸۲۱

بازاء ۹٫۶۳۰۵۶۸۹ ۲۵° ۱۲′ ۱۰″ (تفاضل ۴۴۶)

۱۳۲۰ .. ۲″
۴۲۸۰ .... ۰٫۹

مل = ۲۵° ۱۲′ ۱۲٫۹″

شرح عمل — لگاریتمی بشرط سابق از جدول برگرفتیم و در تحت لگاریتم مفروض نوشتیم

وتفریق کردیم و در یمین ۲ ۱۳۲ صفری ملحق نمودیم و ۱۳۲۰ را از دور بر تفاضل جدولی ۴۴ قسمت کردیم خارج قسمت ۲ واحد شد یعنی ۲ ثانیه و ۴۴ را در ۲ ضرب کرده حاصل را از مقسوم ۱۳۲۰ تفریق کردیم باقی ماند ۴۲۸ صفر دیگر برا و ملحق ساخته قسمت کردیم بر ۴۴۶ رقم دویم خارج قسمت ۹ شد و آن اعشار ثانیه است و چنین نوشتیم ۲٫۹″ و از لگارتیم جدول اضافه کردیم مطلوب بدست آمد

مثال دویم لگ ظل حل = ۹٫۸۱۲۰۹۶۴ و مطلوب است قوس حل

لگ ظل حل = ۹٫۸۱۲۰۹۶۴
بازاء ۹۸۱۲۰۷۱۲ ″۳۰ ′۱۶ °۳۳ (تفاضل ۴۵۹)
۰ ۰ ۲۵۲۰ ″۵
۰ ۰ ۲۲۵۰ ۵٫۴
حل = ″۳۵٫۴ ′۱۶ °۳۳

مثال سیم لگ جم حل = ۹٫۷۳۱۹۴۰۲ و مطلوب است قوس حل

لگ جم حل = ۹٫۷۳۱۹۴۰۲
بازاء ۹٫۷۳۱۹۶۳۲ ″۱۰ ′۲۱ °۵۷ (تفاضل ۳۲۸)
۲۳۰۰ ۷
۴۰ ۷٫۰
حل = ″۱۷ ′۲۱ °۵۷

مثال چهارم لگ ظم حل = ۹٫۷۶۰۷۱۸۲ و مطلوب است قوس حل

لگ ظم حل = ۹٫۷۶۰۷۱۸۲
بازاء ۹٫۷۶۰۷۵۸۴ ″۲۰ ′۲ °۶۰ (تفاضل ۴۸۲)
۳۹۷۰ ″۸
۲۴۰ ۸٫۱
حل = ″۲۸٫۱ ′۲ °۶۰

تنبیه ــ در دو مثال اخیر لگارتمی را که از جدول بر گرفتیم بلا فصل بر تر از لگارتیم مفروض است نه پست تر و نکته اش این است که منیخواهیم تعدیل ما بین السطرین مانند دو مثال اول اضافی کرد نه نقصانی زیرا که هر چند لگارتیم جیب تمام یا لگارتیم ظل تمام نقصان پذیرد قوس نظیرش افزاید

۵۲ **پنجاه و دوّم** در شرح جدول لالاند — در این جدول لگاریتمهای جیوب و جیوب تمام و اظلال واظلال تمام قسی را از یک دقیقه تا ۹۰ درجه دقیقه بدقیقه با ۵ رقم اعشار ضبط کرده اند و عدد درجات و اسامی خطوط مثلثاتی را تا قوس از ۴۵ درجه تجاوز نکرده باشد بر سر ستونها نوشته اند و چون قوس از ۴۵ درجه تجاوز کند باید آنها را در تحت همان ستونها طلب نمود و در صورت اوّل دقایق را باید در ستون اوّل سمت یسار و در جهة هبوط بر گرفت و در صورت دوّیم در ستون آخر سمت یمین و در جهة صعود و تفاضل مابین هر دو لگاریتم مثلثاتی جیوب و جیوب تمام را در ستون کوچکی که در میان هر کدام است طلب کنند و تفاضل مابین هر دو لگاریتم ظل مساویست با تفاضل مابین دو لگاریتم ظل تمام همان قوسها ن ۴۶ و این تفاضل مشترک را مابین دو ستونی طلب کنند که بعنوان ظل و ظل تمام است

تنبیه کالیه و لالاند نام دو نفر مهندس است که دو جدول مذکور را ترتیب داده اند و ارقام آنها فرنگی است و باسلوب لغت خارجه مرتّب شده و چون هنوز در زبان ما چاپ نشده اند و استنساخ آنها بسیار مشکل است و علاوه بر آن تحصیل جداول فرنگیش آسان است و چندان قیمتی ندارد شرح جداول لگاریتمی که در حساب ذکر نمودیم و شرح جداول مثلثاتی که اینجا بیان کردیم جمیعاً مطابق اند با آن جداول فرنگی و بر فرض آنکه بسبک فارسی نوشته شوند چندان تغییری در شرح مذکور عارض نمیشود

۵۳ **پنجاه و سیّم** بعد از این اشارات چون قوسی فرض کنیم صاحب درجات و دقایق شمانه پس لگاریتم خطوط مثلثاتیش باسانی از این جدول بر گرفته میشود

مثال مطلوبست لگ حب ۲۹ ج ۳۷ ق

چون قوس از ۴۵ ج کمتر است جیبش را در فوق صفحات طلب میکنیم بعد از یافتن ۲۹ ج را در ستون اوّل سمت یسار ولی در جهة هبوط و در تحت ۳۰ ق پس در میان ۳۷ ق بر خط

افقی لکاریتم مطلوب ضبط است از اینقرار

لك حب ۲۹ج ۳۷ق = ۹٫۶۹۳۹۰

مثال دویم مطلوب است لك ظم ۱۷ج ۴۳ق

قوس از ۴۵ درجه تجاوز نموده ظل تمام ۱۷ج را باید در تحت صفحات طلب نمود و
بعد از یافتن ۴۳ق را در ستون آخر سمت یمین و درجه صعود و بر خط افقیش در
ستونی که بعنوان ظم ۱۷ج است لکاریتم مطلوب را لك ظم ۱۷ج ۴۳ق = ۹٫۵۱۰۳۴

۵۴ نتیجهٔ چهارم — حال قوسی فرض میکنیم که صاحب ثوانی باشد

مثال مطلوب است لك حب ۳۱ج ۲۷ق ۴۳ث

اول ثوانی را منظور ننما وریم و بدستور العمل فوق لك حب ۳۱ج ۲۷ق را در جدول
طلب میکنیم و بتعدیل مابین السطرین انچه بازاء ثوانی باشد حساب کرده لکاریتم مطلوب را
معلوم میکنیم و مبنای تعدیل چنانست که تفاضل مابین هر دو لکاریتم را متناسب فرض میکنیم
با تفاضل مابین دو قوس آنها و این نسبت اگرچه محقق نیست ولی اختلافش اندک است
و تفریعش در اعمال رسمیه کافی باشد و صورت عمل اینست

لك حب ۳۱° ۲۷′ = ۹٫۷۱۷۶۴۷ (تفاضل ۲۰)
بازاء ۴۳ ... ۱۴
لك حب ۳۱° ۲۷′ ۴۳″ = ۹٫۷۱۷۶۶۱

۲۰ × ۴۳ = ۸۶۰ ؛ ۸۶۰ ÷ ۶۰ = ۱۴ (باقی ۲۰)

شرح عمل — لکاریتم ۳۱° ۲۷′ را در جدول طلب میکنیم و تفاضل مابین لکاریتم و لکاریتم
مابعد را ۲۰ یافتیم از اعشار مرتبهٔ اخیر پس گوئیم چون تفاضل مابین دو قوس یکدقیقه باشد
اختلاف مابین دو لکاریتم ۲۰ میشود و اگر تفاضل یکثانیه باشد اختلاف $\frac{۲۰}{۶۰}$ میشود و اگر
تفاضل ۴۳ثه باشد اختلاف مابین لکاریتم جیب ۳۱° ۲۷′ و لکاریتم جیب ۳۱° ۲۷′
۴۳″ انقدر میشود $\frac{۲۰ \times ۴۳}{۶۰}$ و این اختلاف را در سمت یمین صورت عمل معلوم

کرده وحاصل ۱۴ را برلگاریتم ۲۱′ ۳۱° اضافه کردیم

مثال دوم مطلوب است لگ حم ۶۲° ۴۳′ ۲۸″

لگ حم ۴۴′ ۶۲° = ۹٫۵۷۸۵۵ (تفاضل ۳۲)

۳۰	
۳۲	۶۰
۹۶۰	۱۶
۹۶۰	

بازاء ۳۲″ − ۱۶

لگ حم ۲۸″ ۴۳′ ۶۲° = ۹٫۵۷۸۷۱

تنبیه - چون خواهیم لگاریتم جیب تمام یا ظل تمامی را از جدول برگیریم باید قوسی را که بالا فصل برتر از قوس مفروض باشد در جدول طلب کنیم (رجوع کنید به ف ۵۰)

۵۵ نتیجهٔ پنجم در حل عکس مسئله مذکوره. لگاریتم یکی از خطوط مثلثاتی قوسی معلوم است و مطلوب باشد تعیین آن یعنی درجات آن قوس

مثال لگ حب حل = ۹٫۵۸۱۴۹ و مطلوب است قوس حل

صورت عمل اینست

لگ حب حل = ۹٫۵۸۱۴۹ (تفاضل ۳۱)

بازاء ۹٫۵۸۱۳۱ ۲۲° ۲۵′

بازاء ۱۸ ۳۵″

۱۸	
۶۰	
۱۰۸۰	۳۱
۱۵۰	۳۵

حل = ۲۲° ۲۵′ ۳۵″

شرح عمل - در جدول داخل میشویم و در ستون جیوب طلب میکنیم لگاریتمی را که در نقصان کمال قرب بلگاریتم مفروض داشته باشد اینست ۹٫۵۸۱۳۱ و قوس بازای این ۲۲° ۲۵′ لگاریتم جدولی را از لگاریتم مفروض تفریق میکنیم و باقی میماند ۱۸ و تفاضل جدولی مابین لگاریتم جیب ۲۵′ ۲۲° و لگاریتم جیب ۲۶′ ۲۲° اینست ۳۱ و بعمل تعدیل چون اختلاف مابین دو لگاریتم ۳۱ باشد تفاضل مابین دو قوس یک دقیقه میشود و اگر اختلاف واحد باشد تفاضل $\frac{1}{31}$ میشود و اگر آن اختلاف مابین لگاریتم جیب حل

و لگا

ولگاریتم جیب ۲۵′ ۲۲° بمقدار ۱۸ باشد تفاضل مابین حل و ۲۵′ ۲۲° میشود ۱۸/۳۱ یا ۱۸×۶۰″/۳۱ و ما این تفاضل را درست بسیار حساب کرده ۳۵ شد

پس حل = ۲۲° ۲۵′ ۳۵″

تقریب این جواب بچند ثانیه میرسد و بر فرض آنکه تفاضل مابین قوسها متناسب باشد بتفاضل مابین لگاریتمها محض آنکه رقم آخر لگاریتمها قریب واحدی تقریب دارد قوس مطلوب بتعدیل مابین السطرین با چند ثانیه تقریب میشود والبته محض همین اختلاف عدد ثوانی تقریب تا ۵ و ۶ میرسد و در مقام تدقیق باید جدول هفت رقمی را استعمال نمود

مثال دویم لل حتم حل = ۹٫۸۰۷۲۲ و مطلوبست قوس حل

لل حتم حل = ۹٫۸۰۷۲۲

بازاء ۵۰° ۵′ ۹٫۸۰۷۳۱ (تفاضل ۱۵)

بازاء ۹ − حل = ۵۰° ۵′ ۳۶″

۹ × ۶۰ = ۵۴۰ / ۱۵ = ۳۶

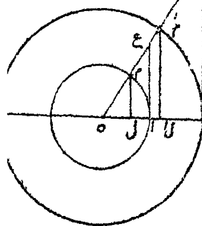
تنبیه چون خواسته باشیم لگاریتم جیب تمام یا لگاریتم ظل تمامی را در جدول مقوس کنیم بنابر آنست که لگاریتم اضافی طلب نمائیم که کمال قریب بلگاریتم مفروض داشته باشد تا تعدیل اضافی شود و لگاریتم مفروض را از او تفریق کنیم (رجوع کنید بجزو ۵۵ وام)

باب دویم در حل مثلثات

۵۶ پنجاه و ششم چون بدست آمد راه استخراج مقادیر خطوط مثلثاتی که نسبت طول الخطوط باشند به نصف قطر واحد مناسب است که ذکر کنیم روابط و نسب موجوده محققه مابین مقادیر و اضلاع هر مثلث را و بعد بیان نمائیم قاعده حل مثلثات را بوساطت این روابط

۵۷ پنجاه و هفتم از اینجا تا آخر کتاب دیگر لفظ قوس را استعمال نکنیم و عوض آن زوایای مثلث را معتبر شماریم مثلاً عوض جیب فلان قوس یا جیب تمامش یا ظلش گوئیم

جیب فلان زاویه با جیب تمامش یا ظلش ولی این عینه زاویه است که مقابل باشد با آن قوس و معلوم است که اختیار زاویه چون با نصف قطر را مساوی با واحد فرض نموده‌ایم مقادیر خطوط مثلثاتی بر وجهیکه استخراج شد مربوط میباشند بعدد درجات قوسی که بطول آن قوس است و طول محیط بسبب اختلاف نصف قطر تغیر پذیر دو تا عدد درجات متغیر نشود با وجود اختلاف انصاف اقطار قوسی که مقابل باشند با زوایای مرکزیه مشخصه و محصوره باشند ما بین همان اضلاع مقادیر خطوط مثلثاتی تغیر نکنند چرا که نسبت ما بین آنها و نصف قطر بحالت خود باقی باشند و تغیر نکنند چنانچه اگر زاویه ا ه م و دو قوس محصوره ام و ا'م' و جیوب و جیوب تمام و اظلال آنها را در شکلی رسم کنیم معلوم شود



که جل / جه = ج'ل' / ج'ه' و هل / هج = ه'ل' / ه'ج' و اع / اه = ا'ع' / ا'ه' و چون درجه مطلق مقیاس است هم در زاویه و هم در قوس مقابلش و بمعرفت عدد درجات مقدار هر دو بلا تفاوت معلوم شود میتوان گفت که هر عدد مثلثاتی چنانچه نظیر قوس است نظیر زاویه مقابل با آن قوس نیز باشد و از آن روی مقدار هر دو مشخص شود

۵۸ پنجاه و هشتم قرار بر این میدهیم که تا آخر کتاب زوایای ثلاثه هر مثلث را بحروف ح و ه و ه بنمائیم و اضلاع مقابله آنها را بهمان حروف که جزئی اختلافی در آنها پیدا شده باشند بدین صورت ح و د و ه و زاویه قائمه هر مثلث قائم الزاویه را بحرف ح بنمائیم و وترش را بحرف ح

در معرفت روابط ما بین زوایا و اضلاع هر مثلث قائم الزاویه

۵۹ پنجاه و نهم قضیه در هر مثلث قائم الزاویه مقدار هر کدام از ضلعین قائمه مساویست با حاصل ضرب وترش در جیب زاویه مقابله با آن ضلع

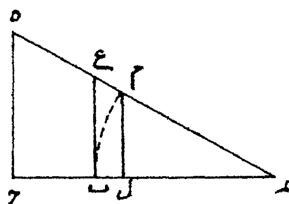
د = ح جب ه

درعوض قوس بقابلش جایز است و هیچ نقصی از آن لازم نیاید زیرا که

بعلا

برهان- از مرکز د و بنصف قطر واحد طول قوسی رسم کنید چون م ب که از طرفین منتهی شود بضلعین زاویه د و عمود م ل را اخراج کنید و آن جیب زاویه د است

پس به تشابه دو مثلث د م ل د ه ح



این تناسب نتیجه میشود $\frac{ه ح}{م ل} = \frac{ه د}{م د}$

یا این تناسب $\frac{د}{جیب د} = \frac{ح}{۱}$ و بنابراین

د = ح جیب د

۶۰ شصتم- چون دو زاویه د و ه تمام همدیگرند جیب د = جم ه و لهذا د = ح جم ه یعنی که در هر مثلث قائمة الزاویه مقدار هر کدام از ضلعین مجاور بزاویه قائمه مساویست با حاصل ضرب وتر در جیب تمام زاویه که مجاور نباشد بان ضلع

۶۱ شصت و یکم- قضیه- در مثلث قائمة الزاویه مقدار هر کدام از ضلعین زاویه قائمه مساویست با حاصل ضرب ضلع دیگر همان زاویه در ظل زاویه مقابله ضلع اول

د = ه ظل د

برهان- ظل قوس م ب را رسم میکنیم و آن ب ع است آنوقت بتشابه دو مثلث د ع ب و د ه ح این تناسب نتیجه میشود $\frac{ح ه}{ب ع} = \frac{ح د}{ب د}$ یا این تناسب $\frac{د}{ظل د} = \frac{ه}{۱}$ و بنابراین د = ه ظل د

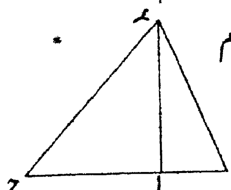
۶۲ شصت و دوم- نتیجه- چون ظل د = ظم ه پس د = ه ظم ه یعنی که در هر مثلث قائمة الزاویه مقدار هر کدام از ضلعین زاویه قائمه مساویست با حاصل ضرب ضلع دیگر در ظل تمام زاویه مجاور به ضلع اول

تساوی د = ه ظل د از ترکیب دو قضیه سابق نیز استنباط شود باینکه

تساوی د = ع حب م را قسمت کنیم بر تساوی ه = ع حم م تا این تساوی نتیجه شود $\frac{د}{ه} = \frac{حب\ م}{حم\ م}$ یا آنکه $\frac{د}{ه} =$ ظل م و بنابراین د = ه ظل م

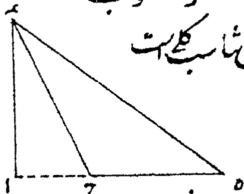
در معرفت روابط ما بین زوایا و اضلاع هر مثلث غیر قائم الزاویه

۶۳ شصت و سیم قضیه در هر مثلث مستقیم الاضلاع نسبت سه ضلعش بهم یکی مثل نسبت جیوب زوایای مقابله بآن اضلاع است نظیر بنظیر



برهان - از راس مثلث عمود مدا را بر قاعده اخراج میکنیم آنوقت بر مقتضای قضیه سابقه ن ٥٩ در مثلث قائم الزاویه مدا این تساوی حاصل میشود مدا = ع حب ه

و در مثلث قائم الزاویه جمدا این تساوی مدا = ه حب ج و بنابراین ع حب ه = ه حب ج و طرفین این تساوی را بر ه حب ه قسمت میکنیم آنوقت $\frac{ع\ حب\ ه}{ه\ حب\ ه} = \frac{ه\ حب\ ج}{ه\ حب\ ه}$ یا آنکه $\frac{ع}{ه} = \frac{حب\ ج}{حب\ ه}$ فهو المطلوب



ممکن است که عمود مدا در خارج مثلث واقع شود ولی ثابت کلیست و باین اختلاف وقوع متغیر نشود چراکه در مثلث مدا ضلع مدا = ع حب ه و در مثلث مجا ضلع مدا = ه حب مجا و چون دو زاویه مجا و مجه مکمل همدیگرند جیب مجه = حب مجا پس مدا = ه جیب مجه یا آنکه مدا = ه حب ج و لهذا ع حب ه = ه حب ج پس $\frac{ع}{ه} = \frac{حب\ ج}{حب\ ه}$

۶۴ شصت و چهارم قضیه در هر مثلث مستقیم الاضلاع مجذور هر کدام از سه ضلع مساویست با مجموع مربعین دو ضلع دیگر منهای مضاعف حاصل ضرب این دو ضلع در جیب تمام زاویه حادثه ما بین همین دو ضلع

$$ے^2 = د^2 + ه^2 - 2\,د\,ه\,\text{حم}\,ح$$

برهان - در شکل اول نمره سابق بعد از اخراج عمود ءا بنا بر آنچه در اصول هندسه مبرهن ساخته‌ایم $\overline{اه}^2 = \overline{حه}^2 + \overline{حد}^2 - 2\,\overline{حه} \times \overline{حا}$ یا آنکه $ے^2 = د^2 + ه^2 - 2\,د \times حا$ و در مثلث حءا چون زاویه ا قائمه است ضلع $حا = ه\,\text{حم}\,ح$ پس در تساوی سابق حا را بدل میکنیم به ه حم ح و آنوقت $ے^2 = د^2 + ه^2 - 2\,د\,ه\,\text{حم}\,ح$
فهو المطلوب

حکم مذکور کلی است اگرچه ضلع اول ے مقابل باشد بزاویهٔ منفرجه زیرا که در اینحالت موافق حکم هندسی $ے^2 = د^2 + ه^2 + 2\,د \times حا$ (شکل دویم نمره سابق)

و در مثلث قائم الزاویه ءحا ضلع $حا = ه\,\text{حم}\,ءحا$ و دو زاویه هحء و ءحا تکمل همدیگرند و بنابرین $\text{حم}\,ءحا = -\text{حم}\,هحء = -\text{حم}\,ح$ پس حم ءحا را بدل میکنیم به − حم ح و آنوقت

$$ے^2 = د^2 + ه^2 - 2\,د\,ه\,\text{حم}\,ح$$

حال چون حکم قضیه را در هر ۳ ضلع جاری کنیم این ۳ تساوی حاصل میشود

$$ے^2 = د^2 + ه^2 - 2\,د\,ه\,\text{حم}\,ح$$

$$د^2 = ے^2 + ه^2 - 2\,ے\,ه\,\text{حم}\,ء$$

$$ه^2 = ے^2 + د^2 - 2\,ے\,د\,\text{حم}\,ه$$

۵۶ مبحث تحقیقی واکنون رابطه دیگر ما بین اضلاع و زوایای مثلث ثابت میکنیم و آن نیز در حل مثلثات بسیار در کار است

قضیه - در هر مثلث ما بین دو ضلع ے و د و دو زاویه ح و ء مقابله بانها و ضلع رابطهٔ ذیل محقق است

ے − د
ے × د

$$\frac{\text{ے} - \text{د}}{\text{د} + \text{ے}} = \frac{\text{ظل}\ \frac{1}{2}\ (\text{ح} - \text{م})}{\text{ظل}\ \frac{1}{2}\ (\text{ح} + \text{م})}$$

برهان - چون ثابت شد که $\frac{\text{ے}}{\text{د}} = \frac{\text{حب ح}}{\text{حب م}}$ از طرفین این تساوی واحدی تفریق میکنیم

پس $\frac{\text{ے}}{\text{د}} - 1 = \frac{\text{حب ح}}{\text{حب م}} - 1$ یا آنکه $\frac{\text{ے} - \text{د}}{\text{د}} = \frac{\text{حب ح} - \text{حب م}}{\text{حب م}}$ (۱)

و بر طرفین همان تساوی واحدی اضافه میکنیم آنوقت

$\frac{\text{ے}}{\text{د}} + 1 = \frac{\text{حب ح}}{\text{حب م}} + 1$ یا آنکه $\frac{\text{ے} + \text{د}}{\text{د}} = \frac{\text{حب ح} + \text{حب م}}{\text{حب م}}$ (۲)

پس تساوی (۱) را بر (۲) قسمت میکنیم این تساوی نتیجه میشود

$$\frac{\text{ے} - \text{د}}{\text{د} + \text{ے}} = \frac{\text{حب ح} - \text{حب م}}{\text{حب ح} + \text{حب م}}$$

ولی $\frac{\text{حب ح} - \text{حب م}}{\text{حب ح} + \text{حب م}} = \frac{\text{ظل}\ \frac{1}{2}\ (\text{ح} - \text{م})}{\text{ظل}\ \frac{1}{2}\ (\text{ح} + \text{م})}$ (۳۲)

پس $\frac{\text{ے} - \text{د}}{\text{ے} + \text{د}} = \frac{\text{ظل}\ \frac{1}{2}\ (\text{ح} - \text{م})}{\text{ظل}\ \frac{1}{2}\ (\text{ح} + \text{م})}$ فهو المطلوب

۶۶ شکل شصت و ششم هرگاه در مثلثی اجزای چند برا معلوم باشد چنانچه از روی آن اجزا بتوانیم مثلث را مشخص کنیم آنوقت ممکن است که بوساطت روابط مذکوره آن مثلث را حل کنیم و اکنون مقصود ما حل انواع مثلثات مستقیمة الخطوط است بنا بر آنکه سه جزء اصلی هر کدام معلوم باشد مشروط بر آنکه در آن سه جزء اقلا یک ضلع مندرج باشد و ابتدا میکنیم بحل مثلثات قائمة الزوایا و جمیع حالات آنرا ذکر میکنیم

در حل مثلثات قائمة الزوایا

۶۷ شکل شصت و هفتم در این نوع مثلثات زاویه قائمه خود معلوم است و در اینصورت معرفت دو جزء دیگر کافیست مشروط بر آنکه اقلا یکی از آنها معلوم ضلع باشد و حالات ممکنه منحصر در چهار است

۶۸ شصت و هشتم حالت اول معلومات وتر ح است و زاویه حاده م و مجهولات زاویه ه و دو ضلع د و هـ

باید این سه رابطه را معمول داشت اول ه = ۹۰° − م دویم د = ح حب م سیم هـ = ح حم م

و مقدار د و هـ را از روی جداول مثلثاتی استخراج کنیم پس دستور دویم و سیم را با رعایت قاعده ۴۴ بلکاریتم تحویل کنیم از اینقرار

لك د = لك ح + لك حب م − ۱۰

لك هـ = لك ح + لك حم م − ۱۰

و در اینها لك حب م و لك حم م لکاریتمهای جدولی حب م و جیب تمام م میباشند (رجوع کنید به ۴۴)

۶۹ شصت و نهم حالت دویم معلومات وتر ح است و ضلع د مجاور زاویه قائمه و مجهولات م است و ه و هـ

پس این روابط را استعمال میکنیم

اولاً د = ح جیب م و بنابراین جیب م = $\frac{د}{ح}$

و ثانیاً ه = ۹۰° − م و ثالثاً هـ۲ = ح۲ − د۲ = (ح + د) (ح − د) جیب م

و مقدار هـ را از روی جدول استخراج میکنیم و لهذا بروفق قاعده ۴۴ دستور اول و سیم را بلکاریتم تحویل میکنیم پس

لك حب م = لك د − لك ح + ۱۰

یا آنکه لك حب م = لك د + متع لك ح (متع علامت متمم عددی است)

و لك هـ = $\frac{1}{2}$ [لك (ح + د) + لك (ح − د)]

رابطه ذیل را نیز برای تعین هـ استعمال کنیم

هـ = ح حم م

وبنابراین لك هـ = لك ح + لك حم م − ۱۰ ف ۴۴

و ما بعد از این باشاره قواعد ۴۴ و ف ۴۵ را درمقام خود استعمال کنیم

۷۰ هفتادم حالت سیم − معلومات ضلع د مجاور بزاویه قائمه است وزاویه حاده م و مجهولات ه است و ح و هـ

پس روابط ذیل را استعمال کنیم

اولاً ه = ۹۰° − م

ثانیاً د = ح حب م ولهذا ح = د / حب م

ثالثاً هـ = د طم م

و باید مقادر ح و هـ را از روی جداول استخراج کنیم پس دستور دویم و سیم را بلگاریتم تحویل کنیم لك ح = لك د − لك حب م + ۱۰ = لك د + مع لك حب م

لك هـ = لك د + لك طم م − ۱۰

وچون م کمتر باشد از ۴۵ درجه چنین منویسیم

لك هـ = لك د + لك طم م ف ۴۵

۷۱ هفتاد ویکم حالت چهارم − معلومات دو ضلع د و هـ محیط بزاویه قائمه است و مجهولات م است و ه و ح

پس این روابط را استعمال کنیم

اولاً د = هـ ظل م وازاینجا ظل م = د / هـ

ثانیاً ه = ۹۰° − م

ثالثاً د = ح حب ء وازاینجا ح = د / حب ء

دستور ء و ح را بلگاریتم تحویل میکنیم ازاینقرار

لك ظل ء = لك د - لك ه + ۱۰ = لك د + مع لك ه

لك ح = لك د - لك حب ء + ۱۰ = لك د + مع لك حب ء

وچون لگاریتم ظل ء را از ۱۰ امتحان وزیاد بیابیم دلیل است براینکه درجات ء از ۴۵ تجاوز کرده وآنوقت قبل از دخول درجدول باید ده واحد ازآن تفریق کرد

وحال چند مثالی درشرح دستورات مذکوره ذکرمیکنیم

۷۲ بفتادودوم مسئله درمثلث قائم الزاویه مقدار ح = ۵۴۳٫۲۷ وء = ۵۳° ۴۲′ ۳۸″ باید سایر اجزا را معلوم کرد

معلومات	جواب مجهولات
ح = ۵۴۳٫۲۷	ه = ۳۶° ۱۲′ ۲۲″
ء = ۵۳° ۴۲′ ۳۸″	د = ۴۳۸٫۸۶۳
دستور اول ه = ۹۰° - ء	ه = ۳۲۰٫۹۰۵

دوم د = ح حب ء وازاینجا لك د = لك ح + لك حب ء - ۱۰

سیم ه = ح حم ء وازاینجا لك ه = لك ح + لك حم ء - ۱۰

وما مقدمه دستورات را چنان مینویسیم که دراستعمال جداول مناسبت داشته باشد

دَر تعیین مقدار ه

۹۰° = ۸۹° ۵۹′ ۶۰″

ء/ه = (۵۳° ۴۲′ ۳۸″)/(۳۶° ۱۲′ ۲۲″)

در استخراج مقدار د

لو ح = ۲,۷۳۵۰۱۵۷
لو حسه = ۹,۹۰۶۸۱۸۲
۱۲,۶۴۱۸۳۳۹
لو د = ۲,۶۴۱۸۳۳۹
د = ۴۳۸,۸۶۳

تفصیل اعمال

اول تعیین لو حسه

لو حسه ۵۳° ۴۷' ۳۰" = ۹,۹۰۶۸۰۵۹ (مقاله ۱۵۴)
بازاء ۸" ۱۲۳
لو حسه ۵۳° ۴۷' ۳۸" = ۹,۹۰۶۸۱۸۲

دوم تعیین د از روی لو د

لو د = ۲,۶۴۱۸۳۳۹
بازاء ۲,۶۴۱۸۳۰۹ ۴۳۸,۸۶
بازاء ۳۰ . ۳
د = ۴۳۸,۸۶۳

در استخراج مقدار هـ

لو ح = ۲,۷۳۵۰۱۵۷
لو حمه = ۹,۷۷۱۳۶۰۹
۱۲,۵۰۶۳۷۶۶
لو هـ = ۲,۵۰۶۳۷۶۶
هـ = ۳۲۰,۹۰۵

اول تعیین لو حمه

لو حمه ۵۳° ۴۷' ۴۵" = ۹,۷۷۱۲۰۵۱ (مقاله ۲۸۸)
بازاء ۸" ۵۸
لو حمه ۵۳° ۴۷' ۳۸" = ۹,۷۷۱۳۶۰۹

دوم تعیین هـ از روی لو هـ

لو هـ = ۲,۵۰۶۳۷۶۶
بازاء ۲,۵۰۶۳۶۹۷ ۳۲۰,۹۰
بازاء ۶۹ ۵
هـ = ۳۲۰,۹۰۵

پس مقداره و د و هـ هر سه معلوم شد

تنبیه چون ترکیب کنیم حسابی را که باید در تعیین مقدار د مجری داشت با حساب متعلق بمقدار هـ اعمال بسیار مختصر میشود و بر محاسب لازمست که از این نکات آگاه شود مثلاً

لك ح چون در هر دو استعمال میشود همان دم که از جدول برگرفتیم در هر دو موضع مینویسیم وهمچنین لك حب ء و لك حم ء چون در یکصفحه جداول واقع میباشند هر دو را یکمرتبه طلب نموده در محل خود جدا مینویسیم ولهذا برای یک قوس دو مرتبه در جدول داخل شدن مفت باید نمود

۷۳ مسئله در مثلث قائم الزاویه د = ۵۴۸٫۳۷۶ وه = ۴۲۱٫۷۸ ومطلوب سائر اجزا است

معلومات

د = ۵۴۸٫۳۷۶

ه = ۴۲۱٫۷۸

جواب مجهولات

ء = ۵۲ حه ۲۶ قه ۴٫۳ سه

ه = ۳۵ ۳۳ ۵۵٫۴

ح = ۶۹۱٫۸۱۹

دستورات د = ه ظل ء یا انکه ظل ء = د/ه و لك ظل ء = لك د - لك ه

و ه = ۹۰° - ء

ح = ———— پس لك ح = لك د + لك حب ء - ۱۰

وچون د اطول است از ه زاویه ء اعظم است از ۴۵° و درینصورت اضافه عدد ۱۰ بر لك ظل ء بیفایده است چونکه باید همان دم از ان تفریق نمود

در استخراج مقدار ء

لك د = ۲٫۷۳۹۰۷۸۵

لك ه = ۲٫۶۲۵۰۸۶۰

لك ظل ء = ۰٫۱۱۳۹۹۲۵

ء = ۵۲° ۲۶′ ۴٫۳″

در تعیین مقدار ه

۸۹° ۵۹′ ۶۰

۵۲ ۲۶ ۴٫۳

ه = ۳۵° ۳۳′ ۵۵٫۷″

تفصیل اعمال

اول در تعیین لك د

لك ۵۴۸٫۳۷ = ۲٫۷۳۹۰۷۳۲

بازاء ۶ — ۴۸

لك ۵۴۸٫۳۷۶ = ۲٫۷۳۹۰۷۸۵

دوم در تعیین مقدار ء از روی لك ظل ء

لك ظل ء = ۰٫۱۱۳۹۹۲۵ (تفاضل ۴۳۵)

بازاء ۰٫۱۱۳۹۷۳۶ ۵۲° ۲۶′ ۴″

۱۸۹۰

بازاء ۱۵۰۰ ۰٫۳

ء = ۵۲° ۲۶′ ۴٫۳

در استخراج

در استخراج مقدار ح

لك د = ۲٫۷۲۳۹۰۷۸۵

متمم لك حسـ ح = ۰٫۱۰۵۹۱۴۱

۲٫۸۳۹۹۹۲۶

لك ح = ۲٫۸۳۹۹۹۲۶

ح = ۶۹۱٫۸۱۹

تفصیل اعمال

اول در تعیین لك حسـ ح

لك حسـ ۵۴° ۲۶'	=	۹٫۸۹۹۰۷۸۴
بازاء ۴"		۶۵
بازاء ۰٫۶"		۱۵
لك حسـ ۵۴° ۲۶' ۴٫۶"	=	۹٫۸۹۹۰۸۵۹

دوم در تعیین ح از روی لك ح

لك ح = ۲٫۸۳۹۹۹۲۶		
بازاء ۲٫۸۳۹۹۸۶۸		۶۹۱٫۸۱
۵۸		۹
	ح =	۶۹۱٫۸۱۹

پس مقادیر د و ه و ح بدست آمد

در حل مثلثات غیر قائمة الزوایا و آن نیز چهار حالت است

۷۴ هفتاد و چهارم. حالت اول یک ضلع و دو زاویه معلوم است و مطلوب باشد استخراج سایر اجزای و سطح مثلث

مثلاً ح و د و ه معلوم فرض شده و مجهولات ح است و د و ه

چون ح + د + ه = ۱۸۰° پس ح = ۱۸۰° − (د + ه)

و بعد از معلوم نمودن ح باید د و ه را مشخص نمود

$\frac{د}{ح} = \frac{حسـ د}{حسـ ح}$ پس $د = \frac{ح \; حسـ د}{حسـ ح}$ و بلکاریتم

لك د = لك ح + لك حسـ د − لك حسـ ح (ب)

و هکذا $\frac{ه}{ح} = \frac{حسـ ه}{حسـ ح}$ پس $ه = \frac{ح \; حسـ ه}{حسـ ح}$

و بلکاریتم لك ه = لك ح + لك حسـ ه − لك حسـ ح (ك)

تنبیه دو دستور (ب) و (ك) را باید از روی جدول مثلثاتی حل نمود بی آنکه در آن

اندک تصرّفی بشود چراکه بازاء + لك جیب د باید ۱۰ واحد تفریق نمود و بازاء - لك حس ح باید ۱۰ واحد اضافه کرد و این دو عمل مکافی شوند و اجرای آن کلام لازم نیست و هرگاه بخواهیم بقاعده متمم عددی پیش روی دو دستور (ب) و (ل) را بدل کنیم این دو دستور

لك د = لك ح + لك حس د + مع لك حس ح - ۱۰

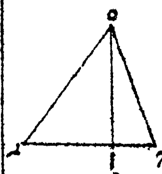
لك هـ = لك ع + لك حس ه + مع لك حس ح - ۱۰

و امّا قاعده مساحت سطح مثلث - در اصول هندسه مبرهن گشته است که

سطح ح د ه = ½ ح د × ۱۰ = ½ هـ × ۱۰

و چون ۱۰ = ع حس د پس سطح ح د ه = ½ هـ ع حس د

و این دستور را در مساحت سطح مثلث وقتی استعمال کنیم که مقدار هـ استخراج شده باشد ولیکن اگر هـ معلوم نباشد و بخواهیم بلا واسطه سطح مثلث را معلوم کنیم باید دستور دیگر استعمال نمود و حال مقصود ما استخراج آنست پس از تساوی



هـ / ع = حس ه / حس ح این تساوی استنباط میشود هـ = ع حس ه / حس ح

و این مقدار را در دستوری که برای سطح معلوم نمودیم قرار میدهیم

سطح ح د ه = ½ ع² حس ه حس د / حس ح

یا آنکه ۲ سطح ح د ه = ع² حس د حس ه / حس ح

و حال موافق قاعده ف ۴۴ این دستور را بلکاریتم تحویل میکنیم

لك ۲ سطح ح د ه = ۲ لك ع + لك حس د + لك حس ه - لك حس ح - ۲۰ + ۱۰

یا آنکه لك ۲ سطح ح د ه = ۲ لك ع + لك حس د + لك حس ه + مع لك حس ح - ۲۰

و بعد از آنکه مضاعف مساحت سطح مثلث بدست آمد آنرا بر ۲ قسمت میکنیم و این عمل بهتر است از آنکه لکاریتم عدد ۲ را در حساب آوریم

هفتاد و پنجم. حالت دوم آنستکه دو ضلع مثلث و زاویه بینهما معلوم باشد و بخواهیم سایر اجزاء و سطح مثلث را استخراج کنیم

مثلاً ح و د و ه معلوم فرض شده و مطلوب است مقدار ح و م و ه و سطح ح م ه و ضمناً قید شده که ح > د یعنی ضلع ح اطول است از د

چون ح + م + ه = ۱۸۰° پس ح + م = ۱۸۰° − ه و چون مجموع دو زاویه معلوم گشت نصفش که $\frac{1}{2}$ (ح + م) باشد معلوم است پس از روی دستور ذیل که در ۶۵ ثابت شده مقدار $\frac{1}{2}$ (ح − م) را نیز معین میکنیم بر اینوجه

$$\frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{ح} + \text{د}} = \frac{\text{ظل}\ \frac{1}{2}(\text{ح} - \text{م})}{\text{ظل}\ \frac{1}{2}(\text{ح} + \text{م})} \qquad \text{و لهذا}$$

$$\text{ظل}\ \frac{1}{2}(\text{ح} - \text{م}) = \frac{(\text{ح} - \text{د})\ \text{ظل}\ \frac{1}{2}(\text{ح} + \text{م})}{\text{ح} + \text{د}} \qquad (\text{ب})$$

و این مساوات را بتوان بلگاریتم حل نمود

حال که مقدار $\frac{1}{2}$ (ح + م) و $\frac{1}{2}$ (ح − م) معلوم شد پس جمله ثانی را با اول جمع میکنیم تا مقدار ح معلوم شود و بعد از آن تفریق میکنیم تا درجات م بدست آید از اینقرار

$$\text{ح} = \frac{1}{2}(\text{ح} + \text{م}) + \frac{1}{2}(\text{ح} - \text{م})$$

$$\text{م} = \frac{1}{2}(\text{ح} + \text{م}) - \frac{1}{2}(\text{ح} - \text{م})$$

و اکنون مشغول میشویم باستخراج ضلع ه و این مساوات را استعمال کنیم

$$\frac{\text{ه}}{\text{ح}} = \frac{\text{جب ه}}{\text{جب ح}} \qquad \text{و از اینجا} \qquad \text{ه} = \frac{\text{ح جب ه}}{\text{جب ح}}$$

$$\text{و بلگاریتم}\quad \text{لك ه} = \text{لك ح} + \text{لك جب ه} - \text{لك جب ح} \qquad (\text{م})$$

تنبیه ۱ ـ از قرار تفصیل مذکور بعد از آنکه $\frac{1}{2}$ (ح + م) و $\frac{1}{2}$ (ح − م) استخراج شد محض تعیین ضلع ه باید لگاریتمهای سه جمله مختلفه را در جدول طلب کنیم و حال آنکه میتوان دستور (م) را مبدل ساخت بدستور دیگر که در او طلب دو لگاریتم بیشتر ضرور نباشد.

واستخراج آن دستور برین نهج است

از این دستور مشخص $\frac{\text{ط}}{\text{حب ح}} = \frac{\text{د}}{\text{حب م}} = \frac{\text{ه}}{\text{حب ه}}$ این دستور را استخراج کنیم

$$\frac{\text{ط} + \text{د}}{\text{حب ح} + \text{حب م}} = \frac{\text{ه}}{\text{حب ه}}$$

وسابق در ص ۲۸ مبرهن گشته که $\text{حب ح} + \text{حب م} = ۲\ \text{حب}\ \frac{۱}{۲}(\text{ح}+\text{م})\ \text{حم}\ \frac{۱}{۲}(\text{ح}-\text{م})$ و در ص ۲۶ ثابت شد که $\text{حب ه} = ۲\ \text{حب}\ \frac{\text{ه}}{۲}\ \text{حم}\ \frac{\text{ه}}{۲}$ و از خارج ظاهر است که $\frac{۱}{۲}(\text{ح}+\text{م}) = ۹۰ - \frac{\text{ه}}{۲}$ ولهذا $\text{حب}\ \frac{۱}{۲}(\text{ح}+\text{م}) = \text{حم}\ \frac{\text{ه}}{۲}$ پس بترکیب آن چند مساوات دستور سابق باین دستور مبدل شود

$$\frac{\text{ط} + \text{د}}{۲\ \text{حب}\ \frac{۱}{۲}(\text{ح}+\text{م})\ \text{حم}\ \frac{۱}{۲}(\text{ح}-\text{م})} = \frac{\text{ه}}{۲\ \text{حب}\ \frac{\text{ه}}{۲}\ \text{حم}\ \frac{\text{ه}}{۲}}$$ و بعد از اختصار

$$\frac{\text{ط} + \text{د}}{\text{حم}\ \frac{۱}{۲}(\text{ح}-\text{م})} = \frac{\text{ه}}{\text{حب}\ \frac{\text{ه}}{۲}}$$

وظاهر است که بوساطت این دستور طلب دو لگاریتم تازه بیشتر لازم نشود چونکه لگاریتم $(\text{ط} + \text{د})$ سابق از جدول برگرفته شده

تنبیه دوم ـ موافق قاعده مذکوره استخراج ضلع ه بعد از تعین دو زاویه مجهوله ممکن شود نه قبل از آن پس اگر خواهیم که آنرا از روی خود معلومات استخراج کنیم بطریق سابق ممکن نشود و باید این دستور را $\text{ه}^۲ = \text{ط}^۲ + \text{د}^۲ - ۲\ \text{ط}\ \text{د}\ \text{حم ه}$

استعمال نمود و بعد از گرفتن جذر طرفین

$$\text{ه} = \sqrt{\text{ط}^۲ + \text{د}^۲ - ۲\ \text{ط}\ \text{د}\ \text{حم ه}}$$

ولیکن آنرا نتوان بلگاریتم حل نمود پس حم ه را بدل کنیم به $۱ - ۲\ \text{حب}^۲\ \frac{\text{ه}}{۲}$ تا این مساوات حاصل شود

$$\text{ه} = \sqrt{\text{ط}^۲ + \text{د}^۲ - ۲\ \text{ط}\ \text{د}\ (۱ - ۲\ \text{حب}^۲\ \frac{\text{ه}}{۲})}$$

و بعد از تصرف جزئی این مساوات حاصل شود

$ه = \sqrt{(ح-د)^{۲} + ۴حد\,حس^{۲}\frac{ه}{۲}} = (ح-د)\sqrt{۱+\frac{۴حد\,حس^{۲}\frac{ه}{۲}}{(ح-د)^{۲}}}$

حال فرض میکنیم که $\frac{۴حد\,حس^{۲}\frac{ه}{۲}}{(ح-د)^{۲}}$ معادل باشد با جذر ظل زاویهٔ غیر معینی مثل ف و آنوقت مقدار ه چنین شود $ه = (ح-د)\sqrt{۱+ظل^{۲}ف} = (ح-د)\,قل\,ف = \frac{ح-د}{حم\,ف}$

واین دستور را بتوان بلکاریتم حل نمود

بوجه دیگر نیز میتوان دستور $ه = \sqrt{ح^{۲}+د^{۲}-۲حد\,حم\,ه}$ را مستعد حساب لکاریتم نمود از اینقرار

چون مجموع $حم^{۲}\frac{ه}{۲} + حس^{۲}\frac{ه}{۲}$ معادل است با واحد جمله $ح^{۲}+د^{۲}$ را در آن ضرب میکنیم و نیز حم ه را بدل میکنیم باینصورت $حم^{۲}\frac{ه}{۲} - حس^{۲}\frac{ه}{۲}$ وآنوقت این مساوات نتیجه شود

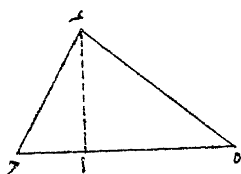
$$ه = \sqrt{(ح^{۲}+د^{۲})(حم^{۲}\frac{ه}{۲}+حس^{۲}\frac{ه}{۲}) - ۲حد(حم^{۲}\frac{ه}{۲}-حس^{۲}\frac{ه}{۲})} = \sqrt{(ح+د)^{۲}حس^{۲}\frac{ه}{۲} + (ح-د)^{۲}حم^{۲}\frac{ه}{۲}}$$

وآنرا باینصورت بدل میکنیم $ه = (ح+د)\,حس\frac{ه}{۲}\sqrt{۱+\frac{(ح-د)^{۲}ظم^{۲}\frac{ه}{۲}}{(ح+د)^{۲}}}$

حال فرض میکنیم $\frac{(ح-د)\,ظم\frac{ه}{۲}}{ح+د} = ظل\,ف$ ولکاریتم از او در جدول ظل معکوس نمود زاویهٔ ف را معلوم میکنیم پس

$$ه = (ح+د)\,حس\frac{ه}{۲}\sqrt{۱+ظل^{۲}ف} = (ح+د)\,حس\frac{ه}{۲}\,قل\,ف$$

یا آنکه $ه = \frac{(ح+د)\,حس\frac{ه}{۲}}{حم\,ف}$



و ظاهر است که این مساوی را میتوان بلکاریتم حل نمود

در مساحت سطح مثلث ـ عمود ءا را بر ضلع د فرود میآوریم وآنوقت سطح $حءه = \frac{۱}{۲}\,د \times ءا$

وچون $ءا = ح\,حس\,ه$ پس سطح $حءه = \frac{۱}{۲}\,حد\,حس\,ه$ و بلکاریتم

لك ۲ سطح $حءه =$ لك ح + لك د + لك حس ه − ۱۰

٧٦ هفتاد و ششم - پس هرگاه در همین حالت سیم ممکن است که عوض ے و د لگارتمهای آنها معلوم باشد در این صورت چون بخواهیم دستور (ب) را بعینه استعمال کنیم میبایست اول در جدول داخل شده مقدار ے و د را معلوم سازیم و بعد مقدار ے − د و مقدار ے + د را و آنوقت لگارتم هر کدام را از جدول برگیریم و حال آنکه ممکن است بتصرف جزئی این دستور را بدل کنیم بدستوری مختصرتر از اینقرار

صورت و مخرج جزء دویم مساوات را بر ے قسمت میکنیم چنین میشود

$$\text{ظل}\ \tfrac{1}{2}(\text{ح}-\text{د}) = \frac{1-\frac{\text{د}}{\text{ے}}}{1+\frac{\text{د}}{\text{ے}}}\cdot \text{ظل}\ \frac{\text{ح}+\text{د}}{2}$$

و فرض میکنیم $\frac{\text{د}}{\text{ے}}$ = ظل ف (ف زاویه ایست مجهول) یا آنکه لك ظل ف = لك د − لك ے + ١٠ (ك) و زاویه ف را از روی (ك) معلوم میکنیم و در مساوات فوق عوض $\frac{\text{د}}{\text{ے}}$ این جمله را (ظل ف) قرار میدهیم چنین میشود

$$\text{ظل}\ \frac{\text{ح}-\text{د}}{2} = \frac{1-\text{ظل ف}}{1+\text{ظل ف}}\cdot\text{ظل}\ \frac{\text{ح}+\text{د}}{2} = \frac{\text{ظل}\ 45^\circ-\text{ظل ف}}{1+\text{ظل}\ 45^\circ\ \text{ظل ف}}\cdot\text{ظل}\ \frac{\text{ح}+\text{د}}{2}$$

یا آنکه $\text{ظل}\ \tfrac{1}{2}(\text{ح}-\text{د}) = \text{ظل}\ (45^\circ-\text{ف})\cdot\text{ظل}\ \frac{\text{ح}+\text{د}}{2}$ (ل)

و حال چون دستور (ك) و (ل) را استعمال کنیم فقط دو مرتبه بنا بید در جدول داخل بشویم و حال آنکه بدستور (ب) چهار نوبت در جدول داخل میشدیم

٧٧ هفتاد و هفتم حالت سیم آنستکه دو ضلع و زاویه مقابل یکی از آنها معلوم باشد و بخواهیم سائر اجزای را استخراج کنیم مثلاً معلومات ے است و د و ح و مطلوب است دو زاویه د و ه و ضلع ه زاویه د از روی این مساوات معلوم شود

$$\frac{\text{حس د}}{\text{حس ح}} = \frac{\text{د}}{\text{ے}} \quad \text{یا} \quad \text{حس د} = \frac{\text{د حس ح}}{\text{ے}} \quad (1)$$

و زاویه ه از این مساوات $\text{ه} = 180^\circ-(\text{ح}+\text{د})$ (٢)

و ضلع ه از این مساوات $\text{ه} = \frac{\text{ے حس ه}}{\text{حس ح}}$ (٣)

تحقیق - چون مقدار حب مʹ از روی مساوات (۱) استخراج میشود اگر (د حب ح)/ع < ۱

یا انکه لك د + لك حب ح - لك ع < ۱۰ و ما در جدول داخل شویم مقدار

مʹ را کمتر از ۹۰° پیدا میکنیم و آنرا مʹ فرض میکنیم پس مʹ < ۹۰° و مکمل مʹ یعنی ۱۸۰° - مʹ = مʺ

نیز صاحب جیب مʹ است و در اینصورت بازاء جیب م دو قوس پیدا میکنیم یکی مʹ و دیگر مʺ

حال بجای م قوس مʹ و مʺ را در مساوات (۲) قرار دهیم این دو مساوات نتیجه میشود

هʹ = ۱۸۰° - (ح + مʹ) و هʺ = ۱۸۰° - (ح + مʺ) و از خارج میدانیم که مقدار ه باید

مثبت باشد پس لازم آید که دو قوس مʹ و مʺ در این دو مساوات صدق کنند ح

+ مʹ < ۱۸۰° و ح + مʺ < ۱۸۰° و در اینصورت جیب قوس هʹ و جیب قوس هʺ

مثبت میشوند و چون هر دو را در مساوات (۳) قرار دهیم ضلع هـ صاحب دو مقدار

مثبت میشود یکی هـʹ = (ع حب هʹ)/(حب ح) و دیگر هـʺ = (ع حب هʺ)/(حب ح)

پس شرط تحقق مسئله همین شد که ح + مʹ < ۱۸۰° و ح + مʺ < ۱۸۰°

حال مقصود آنکه بدانیم خصوصیات مسئله چه باشد تا تحقق شرط مذکور ممکن شود

پس گوئیم اولاً اگر زاویه مفروضه ح منفرجه باشد یا قائمه لابد

ح + مʺ > ۱۸۰° میشود

و بنابراین باید از جواب ثانی مʺ چشم بپوشیم چونکه بزرگتر میشود از ۹۰°

و اما جواب اول مʹ مناسب نباشد جز در صورتیکه ح + مʹ < ۱۸۰° یا مʹ < ۱۸۰° - ح

یعنی حب مʹ < حب ح یا آنکه (د حب ح)/ع < حب ح و لهذا د < ع

پس معلوم شد که اگر زاویه مفروضه ح منفرجه باشد یا قائمه مسئله بیش از

یك جواب قبول نکند و آنهم در اینصورت که ضلع مقابل بزاویه مفروضه

اعظم باشد از ضلعی که مجاور است بهمان زاویه .

ثانیاً- اگر زاویهٔ مفروضه ج حاده باشد لابد ج + مٔ < ۱۸۰° و درینصورت زاویهٔ مٔ

خود مناسب جواب مسئله هست

واما شرط ج + مٔٔ < ۱۸۰° اقتضا کند که ج < ۱۸۰° - مٔٔ یا جیب ج < جیب مٔ

یا جیب ج < د جیب ج / ح یا ح < د

پس اگر ضلع مقابل بزاویهٔ حاده ج اقصر باشد از ضلعی که مجاور است بهما[زاویه]

مسئله صاحب دو جواب میشود والا یکجواب و این شرط اضافه است بر شرط

سابق د جیب ج / ح < ۱

حال فرض میکنیم د جیب ج / ح = ۱ پس مٔ = ۹۰° و مٔٔ = ۹۰°

و آنوقت از هر دو نامساوات نتیجه میشود که ج < ۹۰° یعنی که بنا بر فرض مذکور

مسئله صاحب یکجواب میشود و اینهم درینصورت که زاویهٔ مفروضه حاده [باشد]

نتیجه - چون حالت سیم را بطریق هندسه تحقیق کنیم نتایج مذکوره بعینه استنباط میشوند

زیرا که چون زاویهٔ ه ج ط را ج فرض کنیم

و ضلع ج ه را د و دو نقطهٔ ج و ه را

دو راس مثلث مطلوب راس سیم واقع [میشود]

بر فصل مشترک میان خط ج ط و دایره که از مرکز ه بنصف قطر ح رسم شود و تقاطع

این دو خط وقوع پیدا نکند جز در صورتیکه نصف قطر ح اقلاً مساوی باشد با عمود ه ا

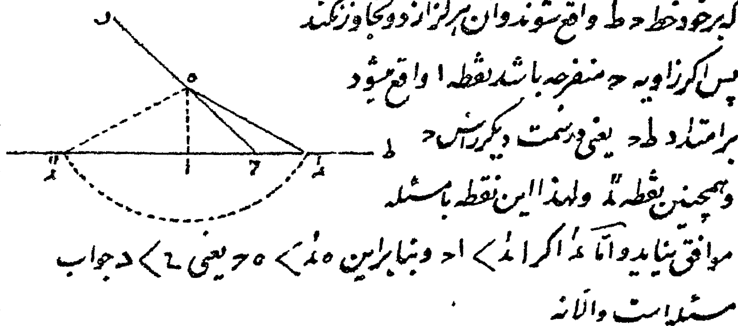
که از نقطهٔ ه بر ج ط اخراج شود و چون در مثلث قائم الزاویه ه ج ا ضلع ه ا = د

جیب ج پس باید ح اقلاً مساوی باشد با د جیب ج و بعبارت اخری د جیب ج / ح

نباید بزرگتر باشد از نصف قطر که واحد فرض شده

پس اگر د جیب ج / ح را کوچکتر از واحد فرض کنیم ه ا کوچکتر میشود از ح و دایره

خط ح ط را برد و نقطه مُ و مٌ قطع میکند و ممکن است که نقطه دویم در سمت دیگر راس ح افتد و درینصورت با مسئله موافق نیاید و جواب محسوب نشود و باید هر دو بر روی خود خط ح ط واقع شوند نه بر امتداد ش و عدد جوابها برابر است با عدد نقاط فصول مشترکه که بر خود خط ح ط واقع شوند و آن هرگز از دو تجاوز نکند



پس اگر زاویه ح منفرجه باشد نقطه ا واقع میشود بر امتداد ط ح یعنی در سمت دیگر راس ح و همچنین نقطه مٌ و لهذا این نقطه با مسئله موافق نیاید و امّا مُ اگر ا مُ > ا ح و بنابراین ه مُ > ه ح یعنی ے > د جواب مسئله است و الا نه

و اگر زاویه ح قائمه باشد فاصله دو نقطه مُ و مٌ از نقطه ح برابر است و دو مثلث ه ح مُ و ه ح مٌ متساوی میگردند و مسئله صاحب یکجواب میشود آنهم در صورتیکه ے > د و الا هیچ جواب قبول نمیکند

و اگر زاویه ح حاده باشد (مرا) نقطه مُ بر ح ط واقع میشود و مثلث ه ح مُ جواب مسئله میشود و امّا نقطه مٌ در صورتی بر ح ط واقع شود و با مسئله موافقت کند که ا مٌ < ا ح و بالجمله اگر ه ا = ے یا $\frac{د \text{ جیب } ح}{ے} = ۱$ دایره مماس میکند خط ح ط را بر نقطه ا و مسئله صاحب یکجواب میشود اگر زاویه ح حاده باشد و الا در صورتیکه منفرجه باشد یا قائمه هیچ جواب ندارد

۷۸ هفتاد و هشتم در حالت سیم دو زاویه مجهول مُ و ه را اول استخراج نمودیم و بعد ضلع هـ را از روی آنها معلوم ساختیم و ممکن است که آنرا بدون واسطه از روی خود معلومات ے و د و ح مشخص کنیم زیرا که از تساوی

$$ز^2 = د^2 + ه^2 - 2\,د\,ه\,جم\,ج$$

این مساوی $ه^2 - 2\,د\,جم\,ج\,.\,ه = ز^2 - د^2$ استنباط شود و بعد از آن

این جواب $ه = د\,جم\,ج \pm \sqrt{ز^2 + د^2(جم^2\,ج - 1)}$

یا این جواب $ه = د\,جم\,ج \pm \sqrt{ز^2 - د^2\,جب^2\,ج}$

و چون هر دو مقدار ضلع ه باید حقیقی و مثبت باشند لازم آید که $ز^2$ اقلاً مساوی باشد

با $د^2\,جب^2\,ج$ و بعبارت اخری $\frac{د\,جب\,ج}{ز} < 1$ و $\frac{د\,جب\,ج}{ز} = 1$

پس اگر فرض کنیم $\frac{د\,جب\,ج}{ز} < 1$ هر دو مقدار ه حقیقی میشوند و مختلف و در اینصورت

باید معلوم کنیم که در کدام حالت مثبت میشوند پس گوئیم

اگر $ج > 90°$ جیب تمامش منفی است و آنوقت باید ریشه را با علامت + اختیار

کنیم و نیز باید این نامساوات محقق باشد $د\,جم\,ج + \sqrt{ز^2 - د^2\,جب^2\,ج} > 0$

و بنابراین $\sqrt{ز^2 - د^2\,جب^2\,ج} > -\,د\,جم\,ج$

و بعد از آن $ز^2 - د^2\,جب^2\,ج > د^2\,جم^2\,ج$

و $ز^2 > د^2$ و $ز > د$

و اگر $ج = 90°$ این چند مساوات حاصل میشود $جم\,ج = 0$ و $جب\,ج = 1$

و $ه = \sqrt{ز^2 - د^2}$ و لهذا $ز > د$

و اگر $ج < 90°$ لازم آید که $جم\,ج > 0$ و حاصل آنچه

$د\,جم\,ج + \sqrt{ز^2 - د^2\,جب^2\,ج}$ موافق باشد بامسئله

و اما جواب ثانی $د\,جم\,ج - \sqrt{ز^2 - د^2\,جب^2\,ج}$ اگر خواهیم مناسب مسئله باشد

باید $\sqrt{ز^2 - د^2\,جب^2\,ج} < د\,جم\,ج$ و لهذا

$ز^2 - د^2\,جب^2\,ج < د^2\,جم^2\,ج$ یا آنکه $ز^2 < د^2(جب^2\,ج + جم^2\,ج)$.

تنبیه

چون ه را مجهول فرض کنیم معادله درجه دوم میشود و جواب آن بقاعده جبر و مقابله استخراج شود

وآنوقت $ع > د$

پس ما در تحقیق مقدار ضلع ه جمیع حالات و شروطی را که سابق ثابت نموده بودیم باز یافتیم خلاصه آنهمه تفاصیل آنکه هرگاه زاویهٔ مفروضه ح حاده باشد و $ع < د$ مسئله صاحب دو جواب میشود و اگر $ع > د$ صاحب یکجواب و اگر زاویهٔ مفروضه منفرجه یا قائمه و $ع > د$ مسئله صاحب یکجواب میشود والا هیچ جواب ندارد

۷۹ مفتاونهم در نمرهٔ سابق که خواستیم مقدار ه را بواسطه استخراج کنیم این دستور را قرار دادیم

$$ه = د\,\text{حم}\,ح \pm \sqrt{ع^{2} - د^{2}\,\text{حب}^{2}\,ح}$$

وچون در این دستور دو جمله جزء ثانی بعلامت $\pm$ بهم مربوط گشته اند نتوان قواعد لگارتیم را در آن جاری ساخت پس بهتر آنستکه بتدبیر و حیل آنرا بیک جمله تحویل کنیم

واول بتصرف جزئی این مساوی حاصل شود

$$ه = د\,\text{حم}\,ح \pm ع\sqrt{1 - \frac{د^{2}\,\text{حب}^{2}\,ح}{ع^{2}}} \qquad (1)$$

وچون حاصل ریشه باید حقیقی باشد مقدار $\frac{د^{2}\,\text{حب}^{2}\,ح}{ع^{2}}$ البته کوچکتر است از واحد پس فرض میکنیم

$$\frac{د\,\text{حب}\,ح}{ع} = \text{حب}\,ف$$ (ف زاویه ایست غیر معین) وآنوقت

$$\sqrt{1 - \frac{د^{2}\,\text{حب}^{2}\,ح}{ع^{2}}} = \sqrt{1 - \text{حب}^{2}\,ف} = \text{حم}\,ف$$

واز مساوات $\text{حب}\,ف = \frac{د\,\text{حب}\,ح}{ع}$ این مساوات نتیجه شود $د = \frac{ع\,\text{حب}\,ف}{\text{حب}\,ح}$

حال در مساوات (۱) بجای $\sqrt{1 - \frac{د^{2}\,\text{حب}^{2}\,ح}{ع^{2}}}$ وبجای د معادل هر کدام را قرار بدهیم

این مساوی نتیجه میشود $ه = \frac{ع\,\text{حب}\,ف\,\text{حم}\,ح}{\text{حب}\,ح} \pm ع\,\text{حم}\,ف =$

$$= \frac{ع\,\text{حب}\,ف\,\text{حم}\,ح \pm ع\,\text{حم}\,ف\,\text{حب}\,ح}{\text{حب}\,ح}$$

یا این مساوی $ه = \frac{ع\,\text{حب}\,(ف \pm ح)}{\text{حب}\,ح}$

وظاهر است که دستور اخیر را بتوان بقانون لگارتیم حل نمود

تنبیه - باید دانست که دو مقدار زاویه ف که از روی این مساوات جب ف $= \frac{\text{د جب ح}}{\text{ے}}$

استخراج میشوند بعینه دو مقدار زاویه م از مثلث مطلوب اند زیرا که جب م $= \frac{\text{د جب ح}}{\text{ے}}$

پس معلوم میشود که این دو مقدار م′ و م″ است و هر دو مکمل همدیگر اند و حال چون درین صورت

$\text{ه} = \frac{\text{ے جب}(\text{ف} \pm \text{ح})}{\text{جب ح}}$ و قوس ف را بدل کنیم به م′ و م″ این تساوی نتیجه میشود

$$\text{ه}' = \frac{\text{ے جب}(\text{م}' \pm \text{ح})}{\text{جب ح}} \quad \text{و} \quad \text{ه}'' = \frac{\text{ے جب}(\text{م}'' \pm \text{ح})}{\text{جب ح}}$$

ولیکن جب $(\text{م}' - \text{ح}) =$ جب $(\text{م}'' + \text{ح})$ زیرا که مجموع دو زاویه $(\text{م}' - \text{ح})$

و $(\text{م}'' + \text{ح})$ معادلست با °۱۸۰ و هکذا جیب $(\text{م}'' - \text{ح}) =$ جب $(\text{م}' + \text{ح})$

و بنابراین مسئله صاحب دو جواب مختلف است نه چهار جواب و آن دو جواب اینست

$$\text{ه}' = \frac{\text{ے جب}(\text{م}' + \text{ح})}{\text{جب ح}} \quad \text{و} \quad \text{ه}'' = \frac{\text{ے جب}(\text{م}'' + \text{ح})}{\text{جب ح}}$$

و چون مکمل دو زاویه $(\text{م}' + \text{ح})$ و $(\text{م}'' + \text{ح})$ را بگیریم دو مقدار ه′ و ه″

از زاویه ه از مثلث مطلوب حاصل آید پس

$$\text{ه}' = \frac{\text{ے جب ه}'}{\text{جب ح}} \quad \text{و} \quad \text{ه}'' = \frac{\text{ے جب ه}''}{\text{جب ح}}$$

پس معلوم شد که چون بوجه ثانی رفتار کنیم و جواب را از روی زاویه واسطه ف استخراج کنیم هیچ اختلاف ندارد با جواب اول که از روی دو زاویه م و ه معلوم نموده بودیم

۸۰ هشتادم - حالت چهارم آنست که سه ضلع ے و د و ه معلوم باشد و بخواهیم سه زاویه ح و م و ه را استخراج کنیم

سابق در ف ۶۴ ثابت کردیم که $\text{ے}^2 = \text{د}^2 + \text{ه}^2 - ۲\ \text{د ه جم ح}$

پس $۲\ \text{د ه جم ح} = \text{د}^2 + \text{ه}^2 - \text{ے}^2$

و $\text{جم ح} = \frac{\text{د}^2 + \text{ه}^2 - \text{ے}^2}{۲\ \text{د ه}}$

و در این مساوات جمیع جملهای جزو ثانی معلومست ولیکن اثر بلگاریتم نتوان حل نمود

پس برصورت کسر ۲ ده بیفزاییم چنین شود $\text{د}^2+\text{ه}^2+2\,\text{ده}-\text{ح}^2$

$$=(\text{د}+\text{ه})^2-\text{ح}^2=(\text{د}+\text{ه}+\text{ح})(\text{د}+\text{ه}-\text{ح})$$

واین مساوات را بعنوان بلکاریتم معلوم نمود و چون برصورت کسر ۲ ده افزودیم یعنی برخود کسر واحدی اضافه کردیم بایدمن باب حفظ تعادل واحدی نیز بر طرف دیگر اضافه کرد

$$1+\text{حم ح}=1+\frac{\text{د}^2+\text{ه}^2-\text{ح}^2}{2\,\text{ده}}=\frac{2\,\text{ده}+\text{د}^2+\text{ه}^2-\text{ح}^2}{2\,\text{ده}}$$

ودر ۲۵ ثابت کردیم $1+\text{حم ح}=2\,\text{حم}^2\frac{\text{ح}}{2}$ پس بعد از تبدیل

$$2\,\text{حم}^2\frac{\text{ح}}{2}=\frac{(\text{د}+\text{ه})^2-\text{ح}^2}{2\,\text{ده}}=\frac{(\text{د}+\text{ه}+\text{ح})(\text{د}+\text{ه}-\text{ح})}{2\,\text{ده}}$$

ومن باب آنکه تقابل و قرینه بدست آید فرض میکنیم $\text{د}+\text{ه}+\text{ح}=2\,\text{ط}$

ولهذا $\text{د}+\text{ه}-\text{ح}=2\,\text{ط}-2\,\text{ح}=2(\text{ط}-\text{ح})$

و چون این دو مقدار را در دستور فوق قرار دهیم این مساوات حاصل شود

$$2\,\text{حم}^2\frac{\text{ح}}{2}=\frac{2\,\text{ط}\times 2(\text{ط}-\text{ح})}{2\,\text{ده}}$$

وبعد از اختصار $\text{حم}^2\frac{\text{ح}}{2}=\frac{\text{ط}(\text{ط}-\text{ح})}{\text{ده}}$

وبنابراین $\text{حم}\frac{\text{ح}}{2}=\sqrt{\frac{\text{ط}(\text{ط}-\text{ح})}{\text{ده}}}$

وبهمان وجه این دو مساوات نتیجه میشود

$\text{حم}\frac{\text{ب}}{2}=\sqrt{\frac{\text{ط}(\text{ط}-\text{د})}{\text{حه}}}$

$\text{حم}\frac{\text{ه}}{2}=\sqrt{\frac{\text{ط}(\text{ط}-\text{ه})}{\text{دح}}}$ (۱)

وظاهر است که از روی این سه دستور درجات ح و ب و ه بعمل لگاریتم مشخص شود ولیکن نظر بنکته که بعنوان تنبیه درآخر ذکر میکنیم مهندسین اولی دانسته اند در عوض مقدار جیب تمام نصف ح وغیره مقدار ظل نصف ح وغیره را استخراج کنند واستعمال نمایند پس مشغول شویم بتعیین آن اظلال و چون جیوب تمام $\frac{\text{ح}}{2}$ و $\frac{\text{ب}}{2}$ و $\frac{\text{ه}}{2}$ استخراج شده معرفت جیوب $\frac{\text{ح}}{2}$ و $\frac{\text{ب}}{2}$ و $\frac{\text{ه}}{2}$ ما را کفایت کند و باین وجه پیش میرویم

ودر ۳۵ ثابت کرده‌ایم که $۲\,\text{حس}^۲\frac{ح}{۲} = ۱-\text{حم}\,ح$

پس $۲\,\text{حس}^۲\frac{ح}{۲} = ۱-\frac{د^۲+ه^۲-ح^۲}{۲\,د\,ه} = \frac{۲\,د\,ه-د^۲-ه^۲+ح^۲}{۲\,د\,ه} =$

$= \frac{ح^۲-(د-ه)^۲}{۲\,د\,ه} = \frac{[ح-(د-ه)](ح+د-ه)}{۲\,د\,ه} =$

$= \frac{(ح-د+ه)(ح+د-ه)}{۲\,د\,ه}$

وحال چون مانند سابق فرض کنیم $ح+د+ه=۲\,ط$ این دو مساوات حاصل میشود

$ح+ه-د=۲(ط-د)$ و $ح+د-ه=۲(ط-ه)$

و بعد $۲\,\text{حس}^۲\frac{ح}{۲} = \frac{۲(ط-د)\,۲(ط-ه)}{۲\,د\,ه}$

و $\text{حس}^۲\frac{ح}{۲} = \frac{(ط-د)(ط-ه)}{د\,ه}$

و $\text{حس}\frac{ح}{۲} = \sqrt{\frac{(ط-د)(ط-ه)}{د\,ه}}$ و همکذا

$\text{حس}\frac{د}{۲} = \sqrt{\frac{(ط-ح)(ط-ه)}{ح\,ه}}$ و $\text{حس}\frac{ه}{۲} = \sqrt{\frac{(ط-ح)(ط-د)}{ح\,د}}$ (۲)

وحال چون دستور (۲) را بر (۱) قسمت کنیم چنین میشود

$\text{ظل}\frac{ح}{۲} = \frac{\text{حس}\frac{ح}{۲}}{\text{حم}\frac{ح}{۲}} = \sqrt{\frac{(ط-د)(ط-ه)}{ط(ط-ح)}}$ (۳)

و همکذا دو مساوات دیگر

وچون برای استعمال جدول مثلثاتی قواعد لکاریتم را در آن جاری کنیم چنین میشود

$\text{لك ظل}\frac{ح}{۲} = \frac{۱}{۲}\{\text{لك}(ط-د)+\text{لك}(ط-ه)+\text{مع لك}\,ط+\text{مع لك}(ط-ح)-۲۰\}+۱۰$ وآن باینصورت مبدل شود

$\text{لك ظل}\frac{ح}{۲} = \frac{۱}{۲}\{\text{لك}(ط-د)+\text{لك}(ط-ه)+\text{مع لك}\,ط+\text{مع لك}(ط-ح)\}$

وهکذا $\text{لك ظل}\frac{د}{۲} = \frac{۱}{۲}\{\text{لك}(ط-ح)+\text{لك}(ط-ه)+\text{مع لك}\,ط+\text{مع لك}(ط-د)\}$

$\text{لك ظل}\frac{ه}{۲} = \frac{۱}{۲}\{\text{لك}(ط-ح)+\text{لك}(ط-د)+\text{مع لك}\,ط+\text{مع لك}(ط-ه)\}$

و مارشها را با علامت + نوشتیم چونکه هر کدام از زوایا کمتر از ۱۸۰ ولهذا نصفش کمتر

از ۹۰ و بر لکاریتم هر ظل ۱۰ واحد اضافه کردیم پس اگر آنوقت حاصل از ۱۰ تجاوز کند معلوم میشود که نصف زاویه مطلوبه از ۴۵ تجاوز کرده و در اینصورت باید قبل از عدد در جدول اینده را تفریق نمود

تنبیه هرگاه در این مسئله یکی از زوایای ثلاثه مثلث تنها مطلوب باشد از روی هر کدام از دستورات (۱) و (۲) و (۳) که خواهیم آنرا استخراج کنیم طلب چهار لکاریتم لازم شود و در اینصورت هیچکدام از این دستورات را بر دیگری رجحان نیست ولیکن اگر هر سه زاویه مطلوب باشد آنوقت استعمال دستور (۳) اولیست چرا که برای همه آنها طلب لکاریتمهای چهار جمله ط و (ط ـ ح) و (ط ـ د) و (ط ـ هـ) بی تفاوت لازم و کافی باشد و حال آنکه اگر خواهیم از روی دستور (۲) مسئله را حل کنیم باید شش لکاریتم طلب کنیم و از روی دستور (۱) هفت لکاریتم

۸۱ هشتاد و یکم در مساحت سطح مثلث در ش ۷۵ ذکر شد که سطح ح د ه = $\frac{۱}{۲}$ ح × د × حس ه (۲)

وحس ه = ۲ حس $\frac{ه}{۲}$ حم $\frac{ه}{۲}$

و چون مقدار حس $\frac{ه}{۲}$ و حم $\frac{ه}{۲}$ را بحسب اضلاع استخراج نموده ایم این مساوات حاصل میشود.

$$\text{حس ه} = ۲ \text{ حس} \frac{ه}{۲} \text{ حم} \frac{ه}{۲} = ۲ \sqrt{\frac{(ط-ح)(ط-د)}{ح د}} \times \sqrt{\frac{ط(ط-ه)}{ح د}} = ۲ \frac{\sqrt{ط(ط-ح)(ط-د)(ط-ه)}}{ح د}$$

و آنوقت سطح ح د ه = $\sqrt{ط(ط-ح)(ط-د)(ط-ه)}$

و این دستور را بلکاریتم میتوان حل نمود

و حال چند مثالی درخصوص حالات مذکوره ذکر کنیم

۸۲ هشتاد و دوم حالت اول معلومات مسئله یک ضلع است و دو زاویه

معلومات	جواب مجهولات
۷۱۲٫۲۴ = ع	۶۳° ۳۳′ ۵۳″ = ح
۹۲° ۷′ ۳″ = ط	۲۹۴٫۸۶۷ = د
۲۴° ۱۹′ ۴″ = ی	۳۲۲٫۵۴۷ = ھ
	سطح ح ط ی = ۱۱۶۵۶۷٫۰ مربع

تنبیہ: مع علامت مربع است

در تعین زاویہ ح

دستور ح = ۱۸۰° − (ط + ی)

۱۸۰° = ۱۷۹° ۵۹′ ۶۰″

ط + ی = ۱۱۶° ۲۶′ ۷″

ح = ۶۳° ۳۳′ ۵۳″

در استخراج مقدار د

دستور $\frac{د}{ع} = \frac{حس ط}{حس ح}$ و د = $\frac{ع\ حس ط}{حس ح}$

لك د = لك ع + لك حس ط + مع لك حس ح − ۱۰

	تفصیل اعمال
لك ع = ۲٫۸۵۲۶۲۶۴	در تعین لك ع
لك حس ط = ۹٫۹۹۹۷۰۳۴	لك ۷۱۲٫۲۴ = ۲٫۸۵۲۶۲۶۴
مع لك حس ح = ۰٫۰۴۷۹۶۴۶	در تعین لك حس ط
۱۲٫۹۰۰۲۹۴۴	۱۸۰° = ۱۷۹° ۵۹′ ۶۰″
لك د = ۲٫۹۰۰۲۹۴۴	ط = ۹۲ ۷ ۳
د = ۲۹۴٫۸۶۷	۱۸۰° − ط = ۸۷° ۵۲′ ۵۷″
	لك حس ۸۷° ۵۲′ ۵۰″ = ۹٫۹۹۹۷۰۲۸ (تفاضل ۸)
	بازاء ۷″ ۵٫۶
	لك حس ۸۷° ۵۲′ ۵۷″ = ۹٫۹۹۹۷۰۳۴

د

در تعیان

در تعیین مع لجب ح

ح = ۶۳° ۳۳′ ۵۳″

لجب ۶۳° ۳۳′ ۵۰″ = ۹٫۹۵۲۰۳۲۳۰ (تقض ۱۰۵)

بازاء ۳″ ۳۱۵

لجب ۶۳° ۳۳′ ۵۳″ = ۹٫۹۵۲۰۳۵۴

مع لجب ح = ۰٫۰۴۷۹۶۴۶

در تعیین دازدو لُ د

ل د = ۲٫۹۰۰۲۹۴۴

بازاء ۲٫۹۰۰۲۹۰۶ ۷۹۴٫۸۶

۳۸ ۷

د = ۷۹۴٫۸۶۷

در استخراج ضلع هـ

دستور $\frac{هـ}{جب ه} = \frac{د}{جب ح}$ و هـ = $\frac{د جب ه}{جب ح}$

ل هـ = لد + لجب ه + مع لجب ح − ۱۰

تفصیل اعمال

در تعیین لجب ه

لجب ۲۴° ۱۹′ ۰″ = ۹٫۶۱۴۶۶۴۷ (تقض ۴۶۶)

بازاء ۴″ ۱۸۶٫۴

لجب ۲۴° ۱۹′ ۴″ = ۹٫۶۱۴۶۸۳۳

لد = ۲٫۸۵۲۶۲۶۴

لجب ه = ۹٫۶۱۴۶۸۳۳

مع لجب ح = ۰٫۰۴۷۹۶۴۶

۱۲٫۵۱۵۲۷۴۳

ل هـ = ۲٫۵۱۵۲۷۴۳

هـ = ۳۲۷٫۵۴۷

در تعیین هـ ازدو لُ هـ

ل هـ = ۲٫۵۱۵۲۷۴۳

بازاء ۲٫۵۱۵۲۶۴۳ ۳۲۷۵۴

بازاء ۱۰۰ ۷

هـ = ۳۲۷٫۵۴۷

در تعیین مساحت

دستور ۲ سطح = ح۲ جب ء جب ه / جب ج

لگ ۲ سطح = ۲ لگ ح + لگ جب ء + لگ جب ه + مع لگ جب ج − ۲۰

۲ لگ ح = ۵٫۷۰۵۲۵۲۸

لگ جب ء = ۹٫۹۹۹۷۰۳۴

لگ جب ه = ۹٫۶۱۴۶۸۳۳

مع لگ جب ج = ۰٫۰۴۲۷۹۶۴۶

۲۵٫۳۶۲۷۶۰۴۱

لگ ۲ سطح = ۵٫۳۶۲۷۶۰۴۱

۲ سطح = ۲۳۳۱۳۴٫۱

سطح = ۱۱۶۵۶۷٫۰۵

در تعیین ۲ سطح از روی لگ ۲ سطح

لگ ۲ سطح = ۵٫۳۶۲۷۶۰۴۱

بازاء ۳۶۷۵۹۸۲ ۲۳۳۱۳

۵۹ ۴۱

۲ سطح = ۲۳۳۱۳۴۱

سطح = ۱۱۶۵۶۷٫۱

۸۳ مثال سیم حالتی که معلوما مثلث دو ضلع است و زاویه بینهما

معلوما	جواب مجهولات
د = ۴۲٫۱۳۰	ء = ۴۲° ۲۲′ ۱۳٫۸″
ه = ۳۵٫۹۵	ه = ۳۲° ۳۲′ ۲۸٫۲″
ج = ۱۰۰° ۵′ ۱۸″	ح = ۱۷۴٫۵۲۱
	سطح = ۶۱۲۱٫۶۴

در استخراج درجات ء و ه

دستور ء + ه = ۱۸۰° − ج

(ء + ه) / ۲ = ۹۰° − ج / ۲

۹۰° = ۸۹° ۵۹′ ۶۰″

ج / ۲ = ۵۰° ۲′ ۳۹″

۱/۲ (ء + ه) = ۳۹° ۵۷′ ۲۱″

در تعیین ½ (م − ه)

دستور ظل ½ (م − ه) = (د − ه) ظل ½ (م + ه) / (د + ه)

لک ظل ½ (م − ه) = لک (د − ه) + لک ظل ½ (م + ه) + مع لک (د + ه) − ۱۰

تفصیل اعمال

در تعیین متمم لگاریتم (د + ه) و لک (د − ه)

لک (د − ه) = ۱٫۵۴۴۹۳۵۸
لک ظل ½ (م + ه) = ۹٫۹۲۳۱۳۳۶
مع لک (د + ه) = ۷٫۶۴۶۳۳۳۸
۱۹٫۱۱۴۴۰۳۲

لک ظل ½ (م − ه) = ۹٫۱۱۴۴۰۳۲

½ (م + ه) = ۳۹° ۵۷′ ۲۱″
½ (م − ه) = ۷° ۲۴′ ۵۲٫۸″
م = ۴۷° ۲۲′ ۱۳٫۸″
ه = ۳۲° ۳۲′ ۲۸٫۲″

د = ۱۳۰٫۴۲
ه = ۹۵٫۳۵
د + ه = ۲۲۵٫۷۷
د − ه = ۳۵٫۰۷

لک (د + ه) = ۲٫۳۵۳۶۶۶۲
مع لک (د + ه) = ۷٫۶۴۶۳۳۳۸
لک (د − ه) = ۱٫۵۴۴۹۳۵۸

در تعیین لک ظل ½ (م + ه)

½ (م + ه) = ۳۹° ۵۷′ ۲۱″
لک ظل ۳۹° ۵۷′ ۲۰″ = ۹٫۹۲۳۱۲۹۳ (تفاضل ۴۲۸)
بازاء ۱″ ۴۳
لک ظل ۳۹° ۵۷′ ۲۱″ = ۹٫۹۲۳۱۳۳۶

در تعیین ½ (م − ه) از روی لک ظل آن

لک ظل ½ (م − ه) = ۹٫۱۱۴۴۰۳۲ (تفاضل ۱۶۶)
بازاء ۹٫۱۱۴۳۵۶۸ ۷° ۲۴′ ۵۰″

۴۶۴۰ ۲″
۱۳۴۸۰ ۰٫۸

½ (م − ه) = ۷° ۲۴′ ۵۲٫۸″

دُوسرا استخراج ضلع ح

دستور $\frac{ح}{حب ح} = \frac{ھ}{حب ہ}$ و ح = $\frac{ھ حب ح}{حب ہ}$

لك ح = لك ھ + لك حب ح + مع لك حب ہ − ۱۰

لك ھ = ۱٫۹۷۹۳۲۰۷
لك حب ح = ۹٫۹۹۳۲۳۲۹
مع لك حب ہ = ۰٫۲۶۹۲۹۴۰
۱۲٫۲۴۱۸۴۷۶

لك ح = ۲٫۲۴۱۸۴۷۶
ح = ۱۷۴٫۵۲۱

تفصیل اعمال

در تعین لك حب ح

حب ح = حب (۱۸۰° − ح)

۱۸۰° = ۱۷۹° ۵۹′ ۶۰″
ح = ۱۰۰° ۵′ ۱۸″
۱۸۰° − = ۷۹° ۵۴′ ۴۲″

لك حب ۷۹° ۵۴′ ۴۰″ = ۹٫۹۹۳۲۳۲۱ (نقل ۳۸)
بازاء ۲″ ۷٫۶

لك حب ۷۹° ۵۴′ ۴۲″ = ۹٫۹۹۳۲۳۲۹

در تعین مع لك حب ہ

ہ = ۳۲° ۳۲′ ۲۸″٫۲

لك حب ۳۲° ۳۲′ ۲۰″ = ۹٫۷۳۰۶۷۸۹ (نقل ۳۵)
بازاء ۸″ ۲۶۴۰
بازاء ۰٫۲ ۶۶

لك حب ۳۲° ۳۲′ ۲۸″٫۲ = ۹٫۷۳۰۷۰۶۰

مع لك حب ہ = ۰٫۲۶۹۲۹۴۰

در تعین ح از روی لگارتیم

لك ح = ۲٫۲۴۱۸۴۷۶
بازاء ۲۴۱۸۴۵۲ ۱۷۴۵۲
بازاء ۲۴ ۱
۱۷۴۵۲۱

ح = ۱۷۴٫۵۲۱

در تعیین مساحت مثلث

دستور ۲ سطح = د ہ حب ح و لگ ۲ سطح = لگ د + لگ ہ + لگ حب ح - ۱۰

لگ د = ۲٫۱۱۵۳۴۴۳
لگ ہ = ۱٫۹۷۹۳۲۰۷
لگ حب ح = ۹٫۹۹۳۲۳۲۹

۱۴٫۵۸۷۸۹۷۸
لگ ۲ سطح = ۴٫۵۸۷۸۹۷۸
۲ سطح = ۱۲۲۴۳٫۲۸
سطح = ۶۱۲۱٫۶۴

در تعیین ۲ سطح از روی لگارتمش

لگ ۲ سطح = ۴٫۰۸۷۸۹۷۸

۱۲۲۴۳ ۰۸۷۸۸۷۸

بازاء	۱۰۰	
بازاء	۷۱	۲
بازاء	۲۹	۸

۲ سطح = ۱۲۲۴۳٫۲۸ ۱۲۲۴۳۲۸

۸۴ هشتاد و چهارم حالت سیم معلوم است مثلث دو ضلع و زاویهٔ مقابلهٔ یکی از آنها چون ٤ و د و زاویهٔ ح

معلومات

٤ = ۵۴۶۷٫۴۸
د = ۵۷۸۴٫۵۹
ح = ۶۶° ۱۸′ ۴۲″

جواب مجهولات

یا د:
ٔد = ۷۵° ۳۹′ ۴۷″٫۴
ًد = ۱۰۴° ۲۰′ ۱۲″٫۶

یا ہ:
ٔہ = ۳۸° ۰′ ۳″٫۶
ًہ = ۹° ۲۱′ ۵″٫۴

یا ح:
ٔح = ۳۶۷۲٫۸۸
ًح = ۹۷۰٫۰۵

در تعیین زاویه د

دستور حب د = د حب ح / ٤ و لگ حب د = لگ د + لگ حب ح + متم لگ ٤ - ۱۰

لگ ۵۷۸۴٫۵۹ = ۳٫۷۶۲۲۷۲۶
لگ حب ۶۶° ۱۸′ ۴۲″ = ۹٫۹۶۱۷۲۴۳
متم لگ ۵۴۶۷٫۴۸ = ۶٫۲۶۲۳۱۲۸

۱۹٫۹۸۶۳۵۹۷
لگ حب د = ۹٫۹۸۶۳۵۹۷

چون آنرا در جدول مقوس کنیم ب = ۴،۴۷″ ۴۱′ ۳۹ ۷۵° و ب′ = ۶،۱۲″ ۲۰′ ۱۰۴°
وازانجاکه ع > د و ج < ۹۰° هر دو مقدار ب موافقت نمایند

جواب اول ب = ۴،۴۷″ ۴۱′ ۳۹ ۷۵°

در تعیین زاویه ه

ه = ۱۸۰° − (ج + ب)

ج = ۶۶° ۱۸′ ۴۲″

ب = ۷۵ ۳۹ ۴۷،۴

= ۱۴۱° ۵۸′ ۲۹،۴″

= ۳۸° ۱′ ۳۰،۶″

در تعیین ضلع هـ

هـ = ع حب ه / حب ج

لك ۵۴۶۷،۴۸ = ۳،۷۳۷۷۸۷۲

للحب ۳۸° ۱′ ۳۰،۶″ = ۹،۷۸۹۵۸۴۸

مع للحب ۶۶° ۱۸′ ۴۲″ = ۰،۰۳۸۲۲۵۷

۱۳،۵۶۵۵۹۷۷

لك هـ = ۳،۵۶۵۵۹۷۷

هـ = ۳۶۷۷،۸۸

جواب دوم ب = ۶،۱۲″ ۲۰′ ۱۰۴°

در تعیین زاویه ه

ه = ۱۸۰° − (ج + ب)

ج = ۶۶° ۱۸′ ۴۲″

ب = ۱۰۴° ۲۰′ ۱۲،۶″

ب + ج = ۱۷۰° ۳۸′ ۵۴،۶″

ه = ۹° ۲۱′ ۵،۴″

در تعیین ضلع هـ

هـ = ع حب ه / حب ج

لك ۵۴۶۷،۴۸ = ۳،۷۳۷۷۸۷۲

للحب ۹° ۲۱′ ۵،۴″ = ۹،۲۱۰۸۲۸۸

مع للحب ۶۶° ۱۸′ ۴۲″ = ۰،۰۳۸۲۲۵۷

مجموع ۱۲،۹۸۶۸۴۱۷

لك هـ = ۲،۹۸۶۸۴۱۷

هـ = ۹۷۰،۰۵

۸۵ هشتاد و پنجم - حالت چهارم - معلومات مسئله سه ضلع مثلث است

معلومات

ع = ۵۸۹،۷۲۲

د = ۴۸۳،۱۴۸

هـ = ۳۵۶،۲۴۹

جواب مجهولات

ج = ۸۷° ۵۴′ ۲۸″

ب = ۵۴° ۵۷′ ۲۶،۶″

ه = ۳۷° ۸′ ۵،۴″

ج + ب + ه = ۱۸۰ ۰ ۰

سطح = ۸۶۰۰۳،۱

دستورات

ظل ½ ح = √[(ط − د)(ط − ه) / ط (ط − ح)] و ظل ½ د = √[(ط − ح)(ط − ه) / ط (ط − د)]

ظل ½ ه = √[(ط − ح)(ط − د) / ط (ط − ه)] و سطح = √[ط (ط − ح)(ط − د)(ط − ه)]

لو ظل ح/۲ = ½ [لو (ط − د) + لو (ط − ه) + مع لو ط + مع لو (ط − ح)]

لو ظل د/۲ = ½ [لو (ط − ح) + لو (ط − ه) + مع لو ط + مع لو (ط − د)]

لو ظل ه/۲ = ½ [لو (ط − ح) + لو (ط − د) + مع لو ط + مع لو (ط − ه)]

لو سطح = ½ [لو ط + لو (ط − ح) + لو (ط − د) + لو (ط − ه)]

تفصیل اعمال لگاریتمی که در دستورات مجری شد

ح = ۵۸۹٫۷۲۲
د = ۴۸۳٫۱۴۸
ه = ۳۵۶٫۲۴۹
۲ط = ۱۴۲۹٫۱۲۴
ط = ۷۱۴٫۵۶۲

در تعیین لو ط و مع لو ط

ط = ۷۱۴٫۵۶۲
لو ۷۱۴٫۵۶ = ۲٫۸۵۴۰۳۸۷
بازاء ۲ — ۱۲
لو ط = ۲٫۸۵۴۰۳۹۹
مع لو ط = ۷٫۱۴۵۹۶۰۱

در تعیین لو (ط − د) و مع لو (ط − د)

ط − د = ۲۳۱٫۴۱۴
لو ۲۳۱٫۴۱ = ۲٫۳۶۴۳۸۲۱
بازاء ۴ — ۷۵
لو (ط − د) = ۲٫۳۶۴۳۸۹۶
مع لو (ط − د) = ۷٫۶۳۵۶۱۰۴

ط − د = ۲۳۱٫۴۱۴
ط − ه = ۳۵۸٫۳۱۳
ط − ح = ۱۲۴٫۸۳۵
ط = ۷۱۴٫۵۶۲ (ضرب تحقیق)

در تعیین لو (ط − ح) و مع لو (ط − ح)

ط − ح = ۱۲۴٫۸۳۵
لو ۱۲۴٫۸۳ = ۲٫۰۹۶۳۱۹۰
بازاء ۵ — ۱۷۵
لو (ط − ح) = ۲٫۰۹۶۳۳۶۵
مع لو (ط − ح) = ۷٫۹۰۳۶۶۳۵

در تعیین لو (ط − ه) و مع لو (ط − ه)

ط − ه = ۳۵۸٫۳۱۳
لو ۳۵۸٫۳۱ = ۲٫۵۵۴۲۵۸۹
بازاء ۳ — ۳۶
لو (ط − ه) = ۲٫۵۵۴۲۶۲۵
مع لو (ط − ه) = ۷٫۴۴۵۷۳۷۵

در استخراج زوایا

در تعیین ج از روی لگ ظل ج/۲ تفصیل اعمال

لگ (ط - د) = ۲٫۳۶۴۳۸۹۶
لگ (ط - ه) = ۲٫۵۵۴۳۶۲۵
مع لگ ط = ۷٫۱۴۵۹۶۰۱
مع لگ (ط - ج) = ۷٫۹۰۳۶۶۳۵
۱۹٫۹۶۸۲۷۵۷
لگ ظل ج/۲ = ۹٫۹۸۴۱۳۷۸
ج/۲ = ۴۳° ۵۷′ ۱۴″
ج = ۸۷° ۵۴′ ۲۸″

لگ ظل ج/۲ = ۹٫۹۸۴۱۳۷۸ (تفاضل ۴۲۲)
بازاء ۴۳° ۵۷′ ۱۰″ ۹٫۹۸۴۱۳۰۸
۴″ ۱۷۰۰
۱۴۰
۴۳° ۵۷′ ۱۴″ = ج/۲

در تعیین ه از روی لگ ظل ه/۲

لگ (ط - ج) = ۲٫۰۹۶۳۳۶۵
لگ (ط - ه) = ۲٫۵۵۴۲۶۲۵
مع لگ ط = ۷٫۱۴۵۹۶۰۱
مع لگ (ط - د) = ۷٫۶۳۵۶۱۰۴
۱۹٫۴۳۲۱۶۹۵
لگ ظل ه/۲ = ۹٫۷۱۶۰۸۴۸
ه/۲ = ۲۷° ۲۸′ ۴۳″٫۸
ه = ۵۴° ۵۷′ ۲۷″٫۶

لگ ظل ه/۲ = ۹٫۷۱۶۰۸۴۸ (تفاضل ۵۱۴)
بازاء ۲۷° ۲۸′ ۴۰″ ۹٫۷۱۶۰۶۵۳
۳″ ۱۹۵۰
۰٫۸ ۴۰۸۰
۲۷° ۲۸′ ۴۳″٫۸ = ه/۲

در تعیین د از روی لگ ظل د/۲

لگ (ط - ج) = ۲٫۰۹۶۳۳۶۵
لگ (ط - د) = ۲٫۳۶۴۳۸۹۶
مع لگ ط = ۷٫۱۴۵۹۶۰۱
مع لگ (ط - ه) = ۷٫۴۴۵۷۳۷۵
۱۹٫۰۵۲۴۲۳۷
لگ ظل د/۲ = ۹٫۵۲۶۲۱۱۸
د/۲ = ۱۸° ۳۴′ ۲″٫۲
د = ۳۷° ۸′ ۴″٫۴

لگ ظل د/۲ = ۹٫۵۲۶۲۱۱۸ (تفاضل ۶۹۸)
بازاء ۱۸° ۳۴′ ۹۵۲۶۱۹۶۶
۲″ ۱۵۲۰
۰٫۲ ۱۴۴۰
۱۸° ۳۴′ ۲″٫۲ = د/۲

در تعیین مساحت

لك ط	=	۲٫۸۵۴۰۳۹۹	لك سطح = ۴٫۹۳۴۵۱۴۳
لك (ط-ب)	=	۲٫۰۹۶۳۳۶۵	بالفاظ ۴٫۹۳۴۵۱۳۶ / ۷ — ۸۶۰۰۳ / ۱ — ۸۶۰۰۳۱
لك (ط-د)	=	۲٫۳۶۴۳۸۹۶	
لك (ط-ه)	=	۲٫۵۵۴۲۶۲۵	
		۹٫۸۶۹۰۲۸۵	
لك سطح	=	۴٫۹۳۴۵۱۴۳	سطح = ۱٫۳ ۸۶۰۰۸ تقریباً
سطح	=	۱٫۳ ۸۶۰۰	

باب سوم

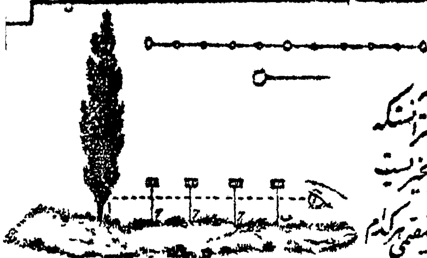
باب سیم در علم زاویه‌گیری یعنی بیان فائده علم مثلثات در نقشه برداری و حل چند مسئله عملیه

٨٦ بشتاق ششم قبل از دخول در مطلب بهتر است که مشغول شویم بمعرفت بعضی آلات هندسیه که ناچار در عملیات لازم شوند و بکار آیند

عملیات مثلثاتی موقوف است بدانستن دو مسئله اول امتداد یا بعد و اندازه گرفتن فاصله مابین دو نقطه مشخصه دویم تعین درجات هر زاویه که حادث شود مابین دو شعاع که از محل بدو نقطه مفروضه وصل شوند و در حل مسئله اول بیرق و زنجیر بکار آید و در دویم آلات زاویه‌گیری و ما این آلات را با فوایدشان در علم نقشه برداری بتفصیل ذکر کرده ایم ولیکن نظر بآنکه در آموختن علم مثلثات بعلوم مابعد حاجت نباشد بطریق اجمال آنچه مقتضی باشد اینجا بیان کنیم

در معرفت بیرق و زنجیر مساحی

چون خواهیم مشخص کنیم وضع خطی را که بوسیم وصل شود مابین دو نقطه که فاصله مابینشان مطلوب است بیرقها استعمال کنیم و آنها قطعات چوب سطیله باشند بشکل استوانه مضلع و بر طرفی از هر کدام پیکانی است برای فرو بردن در زمین و در مقام عمل دو شخص لازمست یکی از آنها در یک سمت اند و نقطه ا و ب چنان قرار میگیرد که دیده اش در سطح قائمی باشد که بر سر دو نقطه گذرد و شخص دیگر مابین دو نشانه ا و ب فاصله بفاصله بیرقهای ح ح و ح .... را چنان نصب میکند که واقع شوند در سطحی قایم که بر دیده ناظر و بر دو نشانه ا و ب گذرد و امتداد یابی



عبارت از همین عمل است

و در مساحت فاصله اب بیشتر آنستکه
زنجیر مساحی استعمال کنند و آن زنجیریست
بطول ده ذرع و مرکب از میلهای مستقیمی هر کدام
چارک ذرع و هر ذرع مشتمل است بر چهار میل و بر هر طرفش حلقه برنجی متصل کرده اند و بر وسط
زنجیر قطعه آهن کوچکی وصل کرده اند تا فاصله پنج ذرعی بی تامل معلوم شود و چون ممکن نیست
زنجیر با استقامت ممتد شود محض رعایت سینه انها وقت ساختن زنجیر بقدر دو صدم
ذرع بر طولش افزایند و زنجیر متری نیز متداول است بطول ده متر و هر متر مرکب از پنج میل یا خمس
متری پس دو نفر با زنجیر ممتد در طول خط ابتدا از نقطه ا بسمت ب حرکت میکنند و آنکس که مقدم
باشد ده سیخ آهن در دست دارد و هر وقت که زنجیر ممتد شد و طرفینش در هر صورت
بر خطی افقی واقع گشت یکی از آنها را در کنار دسته زنجیر بر زمین نصب کنند و زنجیر کش که
در عقب او است بر دارد آنها را بر میکند و در آخر هر چند سیخ که در دست دارد عدد عشرات
ذرعهائی است که پیموده است و چنین خط بعد از آنکه روی زمین مساحت شد خط مبنی موسوم شود

و در مساحت ابعاد قصیره و در مواضع کم وسعت تبدیل زنجیر بسطره دو ذرعی و پیچش آلت[4]
و باید دانست که در اعمال مثلثاتی مساحت خط مبنی از اصول محسوب میشود و کمال دقت را
باید در او مرعی داشت پس از چند مرتبه ذرع کنند و مجموع نتایج را بر عدد مراتب عمل قسمت
نمایند تا مقدار اوسط مساحت بدست آید و معلوم است که دقیق تر از آن ممکن نباشد

در معرفت آلات زاویه گیری

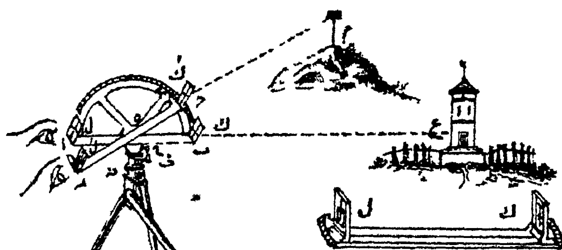
رؤس آلاتیکه در مساحت زوایا استعمال کنند بحسب عدد شش است زاویه یاب[1] قطب نما[2] دایره مکرره[3] طول یاب[4] سدس دایره[5] دایره انعکاس

[4] پیچش جبه آلت مسدود و سر بسته از پوست یا برنج و محوری دارد که بدورش نواری پیچیده اند و یکطرف نوار از پهلوی جعبه بیرون آمده و طول آن نوار از یکذرع هست الی سی ذرع یا بیشتر و قسمت شده است بذرع و باجزای ذرع

و ما اینجا بتعریف زاویه یاب اکتفا کنیم و آلت طول یاب و دایره مکرره هر دو تعلق دارند
بعلم زمین پیمائی و قطب نما و سدس دایره و دایره انعکاس در بحر بکار آیند
و هر سه را در علم ملاحی شرح دهند

در معرفت زاویه یاب

۸۷ هشتاد و هفتم زاویه یاب رسمی مرکب است از دایره تمام یا از نصف دایره برنجی
ا د ب که به ۱۸۰ حصه قسمت شده و هر درجه بدو نیم و قطر ا ب متصل است بدایره
ولیکن قطر حـ د که معروف است بعضاده متحرکه اتصال بچیزی ندارد جز بمرکز ه و در
حول او وقت ضرورت متحرکست و طرفش حـ درجات محیط را طی میکند و بر اطراف
ا و ب و حـ و د از عضاده ساکن و متحرک



چهار قطعه فلز ل و ك و لَ و كَ را چنان نصب کرده اند که عمود باشند بسطح دایره
برنجی و هر کدام مربعی است مستطیل و رخنه دارد به مستطیل که نصفش عریض است و نصفی
دقیق و رخنه دقیق بر وسط عریض منتهی میشود و بر وسط هر ثقبه در جهة طول تاری ممتد شده
و چنین قطعات را لبنه گوئیم و بر طرف عضاده متحرکه قطعه فلزی مثل سـ قرار داده شده
معروف به نونیوس یا ورنیه (اسم دو نفر هندسی است که واضع این الت کوچک بوده اند)
که بوساطت آن مقدار هر زاویه تا دقیقه مشخص شود و تمام آلت را بوساطت استوانه مجوفه

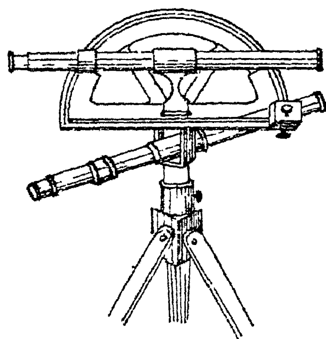
ه و با پیچ فشار ف برسته پایه سه سه سه و سطح دایره اش را بحرکت زانو و پیچ مثبت
کردن پیچ فشار ح میتوان بهر وضع که خواهیم افقی یا مایل حول مرکز ه قرار داد
وچون خواهیم با این آلت اندازه بگیریم زاویه حادثه مابین دو شعاعی را که از قرارگاه ط
بدو نشانه م و ع وصل شده انرا چنان قرار میدهیم که نقطه قرارگاهش مسقط الحجر مرکز
دایره برنجی واقع شود و سطح اندایره برسته نقطه ط و م و ع گذرد و دیده خود را بر شقاف
ل (رخنه دقیق لبنه) از عضاده ساکن قرار میدهیم و دایره را انقدر میگردانیم که شعاع
ل ك بنقطه ع منتهی شود و پیچ ح راسخت میکنیم تا بهمان وضع بماند و بعد عضاده متحرکه
مدح را انقدر میگردانیم که نشانه م در وراء تار لبنه ح مخفی شود آنوقت قوسی که محصور
باشد مابین صفر درجه قسمتهای محیط و صفر درجه ورنیه مقدار زاویه مطلوبه م ه ع است
زاویه یاب لبنه داری را که بصفت مذکور باشد استعمال نکنیم جز در اعمال رسمیه
مثلثاتی که دقت زیاد اقتضا نکند پس هرگاه فاصله نشانه از قرارگاه آلت زیاد باشد قطر تار
مانع از تدقیق عمل شود چونکه آنوقت وضع امتداد شعاع خوب مشخص نشود و بیشتر آنستکه
اگر فاصله از حد بگذرد قطر تار نشانه را بکلی مخفی سازد پس درینصورت بهتر آنستکه
عوض زاویه یاب مذکور زاویه یاب دوربین دار استعمال کنید و معرفت آن
بعد از تفصیل مذکور اشکالی ندارد

در معرفت زاویه یاب دوربین دار

۸۸ هشتاد و هشتم — این آلت مرکب است از نصف دایره برنجی یا از دایره تمام که دو دوربین
بآن متصل شده یکی فوقانی و دیگری تحتانی و ثانی در حول محور خود چنان دوران کند که
سطح حادث بحرکت محور لوله اش عمود باشد بر سطح دایره برنجی و این دایره چون حول
مرکزش دوران کند هر دو دوربین را با خود ببرد و دوربین فوقانی ممکن است تنها حرکت

کند و پیچ فشاری وارد که بعد از سست کردن حرکتش سریع میشود و پیچ بازگشتی دارد که بحرکت او با کمال بطوء سیر میکند

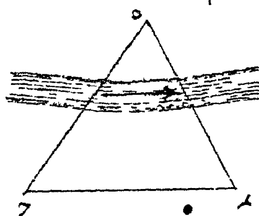
و چون خواهیم زاویه را اندازه بگیریم او را چنان قرار میدهیم که مرکزش با نقطه قرارگاه بر یک خط قائم باشند و سطح دایره بر یکی بر دو نشانه بگذرد آنوقت انقدر دورش میدهیم که یکی از دو نشانه در فضاء دوربین تحتانی دیده شود پس پیچ فشار را سخت میکنیم و پیچ بازگشت را میگردانیم تا آنکه نشانه با نقطه ملتقای دو تار مشبک دوربین مقابل شود و بعد عضاده را که حامل دوربین فوقانی است بسرعت حرکت میدهیم تا نشانه در فضاء دوربین آید و پیچ فشار را سخت میکنیم و بوساطت پیچ بازگشت آنرا در وراء مشبک دوربین میاوریم و عدد درجات و دقایق را که محصور باشد مابین صفر



محیط دایره و صفر ورنیه دوربین میخوانیم تا مقدار زاویه بدست آید و اگر تدقیق بیش از آن خواهیم همان زاویه را چند مرتبه اندازه میگیریم و واسطه میان آنها اختیار میکنیم و حال مشغول میشویم بحل مسائل

هشتادونهم

مسئله اول میخواهیم فاصله مقام خود را اگر ج باشد از نقطه غیر ممکن الوصول ه مشخص کنیم



در روی زمین بنائی مثل ج د چنان اختیار میکنیم که از طرفینش نقطه ه دیده شود و طولش را مساحت میکنیم و با آلت زاویه یاب هر دو زاویه ج د ه

و ﻫ ده را اندازه میکیریم و آنوقت در مثلث ح ده ضلع ح ﻫ که ﻫ فرض میشود بازاویهٔ ح و زاویهٔ معلومست و بوساطت آنها ضلع ح ده که د فرض شده و فاصلهٔ مطلوبست باسانی استخراج شود (رجوع کنید بحالت اوّل ص ۷۴)

دستور $\frac{د}{ﻫ} = \frac{حب ﻫ}{حب ه}$ و $د = \frac{ﻫ\ حب ﻫ}{حب ه}$

مثال ﻫ = ۲۰۷٫۱۱ و ﻫ = ″۲۴ ′۲۲ °۸۵ و ح = ″۵۵ ′۱۹ °۵۳

وبنابراین ه = ″۶۴ ′۱۲ °۴۱

لك ۲۰۷٫۱۱	=	۲٫۳۱۶۲۰۱۱
لك حب ″۲۴ ′۲۲ °۸۵	=	۹٫۹۹۸۶۳۳۲
متمم لك حب ″۶۴ ′۱۲ °۴۱	=	۰٫۱۸۱۲۰۸۷
مجموع		۱۲٫۴۹۶۰۴۳۰
لك د	=	۲٫۴۹۶۰۴۳۰
ه ح	=	۳۱۳٫۳۶

نوزدهم مسئلهٔ دوم میخواهیم فاصلهٔ مابین دو نقطهٔ غیر ممکن الوصول ه و ب را مشخص کنیم

در روی زمین دو نقطه مثل ح و ﻫ چنان اختیار میکنیم که از هر کدام دو نقطهٔ ه و ب دیده شوند و مابین آنها مبنای ح ﻫ را وصل میکنیم و طولش را اندازه میکیریم و بعد با زاویه یاب چهار زاویهٔ ح ﻫ ه و ﻫ ح ه و ح ﻫ ب و ﻫ ح ب را معلوم میکنیم و آنوقت بوساطت این معلومات ضلع ﻫ ه از مثلث ح ﻫ ه و ضلع ﻫ ب از مثلث ح ﻫ ب را استخراج میکنیم و این مسئله حالت اوّل است و بعد زاویهٔ ه ﻫ ب را

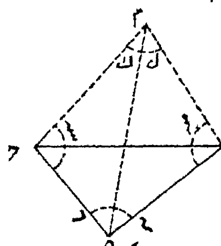
اندازه میگیریم و اگر بر چهار نقطه ح و د و ه و ب بر سطحی مستوی باشند از زاویه بمقدار
تفاضل این دو زاویه ح د ب و ح د ه است که اول اندازه گرفته بودیم و آنوقت در مثلث
ه د ب دو ضلع ه د و د ب و زاویه بینهما ه د ب معلوم است و بوساطت آنها ضلع
ثالث ه ب استخراج میشود و آن فاصله مطلوب است (رجوع کنید بحالت دوم ۱۲۵)

و استخراج ضلع ه ب را از روی چند مثلث بیانی عمل تثلیث گویند و ما در
آخر مثال عددی برای این مسئله آوریم و بتفصیل حل کنیم

۹۱ نوع دیگر مسئله ۳ - میخواهیم خط ح د را در وراء مانعی امتداد دهیم
قرارگاهی مثل ب اختیار میکنیم که
بتوان از آنجا دید خط ح د و مانع و زمینی
را که باید خط باستقامت در آن ممتد شود و دو
خط ح ب و د ب را وصل میکنیم و هر دو را با خط ح د اندازه میگیریم و با برق
خطی دیگر مثل ب ه در سمت مانع رسم میکنیم و با زاویه یاب زاویه د ب ه
را اندازه میگیریم و آنوقت در مثلث ح د ب سه ضلع بر ما معلوم است و زاویه
ح د ب را استخراج میکنیم و بعد در مثلث د ب ه سه جزء بر ما معلوم است ضلع د ب
و زاویه د ب ه و زاویه ب د ه که فضل ۱۸۰ است بر ح د ب پس ضلع ب ه
و زاویه ب ه د را استخراج میکنیم و چون ضلع ب ه معلوم شد ابتدا از نقطه ب از خط
برق گوییده ب ح باندازه آن ضلع جدا میکنیم تا نقطه ه بدست آید و آن بر استقامت
ح د واقع است و بوساطت زاویه معلومه ب ه د در طول ه د و سمت مانع
یا در خلاف الجهة سیر میکنیم و برق می نشانیم

۹۲ نوع دیگر مسئله ۴ - سه نقطه ح و د و ه بر زمین هموار ی فرض

شده مقصود آنستکه بر صفحهٔ نقشهٔ از زمین نقطهٔ مثل م مشخص کنیم بوجهی که از امتداد و فاصلهٔ ح ه و ه ط و تر دو زاویه گردند که در روی زمین اندازه گرفته شده



بمعرفت دو زاویه ه ح م و ه ط م محل نقطهٔ م بدست میآید چراکه هرگاه در صفحهٔ نقشه از دو نقطهٔ ح و ط اندو زاویه را بر ح ه و بر ط ه رسم کنیم دو ضلع جدید بر نقطهٔ مطلوبهٔ م متقاطع میشوند پس زاویهٔ ه ح م را س فرض میکنیم و زاویهٔ ه ط م را ص و برای تعیین این دو مجهول فاصلهٔ ح ه = د و فاصلهٔ ه ط = ع و زاویهٔ ح ه ط را اندازه میگیریم و دو زاویهٔ ح م ه = ك و ه م ط = ل اول معلوم فرض شده و زمین چون هموار است چهار نقطهٔ ح و ط و ه و م بر سطحی مستوی واقع میباشند و در اینصورت مجموع زوایای ذو اربعة اضلاع ح ه ط م معادلست با چهار قائمه

(ك + ل) + س + ح ه ط + ص = ۳۶۰°

س + ص = ۳۶۰° − (ك + ل + ح ه ط)

و چون س + ص و بعد از آن ½ (س + ص) معلوم گشت مقدار ½ (س − ص) را نیز بوجهیکه در حالت دویم (۷۵) بیان کرده ایم استخراج میکنیم پس در مثلث ح ه م این تناسب حاصل میشود $\frac{\text{ه م}}{\text{ح ه}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جيب ك}}$ و $\text{ه م} = \frac{\text{ح جب س}}{\text{جيب ك}} = \frac{\text{د جب س}}{\text{جب ك}}$

و در مثلث ط ه م این تناسب $\frac{\text{ه م}}{\text{ط ه}} = \frac{\text{جب ص}}{\text{جب ل}}$ و از اینجا

$\text{ه م} = \frac{\text{ط ه جب ص}}{\text{جب ل}} = \frac{\text{ع جب ص}}{\text{جب ل}}$

و آنوقت دو مقدار ه م با هم معادل میشوند باینصورت

$\frac{\text{د جب س}}{\text{جب ك}} = \frac{\text{ع جب ص}}{\text{جب ل}}$ و از اینجا $\frac{\text{جب س}}{\text{جب ص}} = \frac{\text{ع جب ك}}{\text{د جب ل}}$

حال خطی مشخص میکنیم مثل دَ که معادل باشد با $\frac{د\ حب ك}{حب ل}$ و بعد از معلوم نمودنش $\frac{حب\ سه}{حب\ صه} = \frac{دَ}{د}$

وآنوقت موافق قاعده (۵۶) این مساوات استخراج میشود

$\frac{حب\ سه - حب\ صه}{حب\ سه + حب\ صه} = \frac{دَ - د}{دَ + د}$ و بعد $\frac{ظل \frac{1}{2}(سه - صه)}{ظل \frac{1}{2}(سه + صه)} = \frac{دَ - د}{دَ + د}$ (ب)

واز دستور اخیر مقدار ظل نصف (سه - صه) و بعد خود مقدار نصف (سه - صه) استخراج میشود و درینصورت $\frac{1}{2}$ (سه - صه) و $\frac{1}{2}$ (سه + صه) در دست است و بجمع و تفریق آنها مقدار سه و صه جدا جدا مشخص میشود

۹۳ **نوت دوم** تحقیق دستوری که استخراج شد مبنی براین فرض بود که محل نقطه م در درون زاویه ح ه مد باشد و بنا برین فواربعه اضلاع ح ه مد م را بوجهی که اول ذکر شد باید رسم نمود و درینصورت جمیع معادلات فوق مطابق آیند با فرض مسئله و هرکدام از دو زاویه سه و صه کوچکتر میشوند از $180°$

ولیکن ممکن است که $\frac{1}{2}$ (سه + صه) از ۹۰ درجه تجاوز کند و چون سه کمتر از ۱۸۰ درجه است $\frac{1}{2}$ (سه - صه) از ۹۰ درجه کمتر میشود و آنوقت ظل $\frac{1}{2}$ (سه + صه) منفی میشود و ظل $\frac{1}{2}$ (سه - صه) مثبت پس درینصورت شرط دستور (ب) اینست که دَ اقصر باشد از د ولهذا دستور مذکور را باینصورت بنویسیم

$$\frac{ظل \frac{1}{2}(سه - صه)}{ظل [180° - \frac{1}{2}(سه + صه)]} = \frac{د - دَ}{د + دَ}$$

و هرگاه نقطه م در درون زاویه ح ه مد نباشد باید سائل ما را اطلاع دهد پس اگر زاویه مقابله با آن باشد ما در معادلات سابقه مد ه ح را بدل کنیم به $360°$ - مد ه ح واگر دریکی از دو زاویه ه ح مد و ه مد ح باشد باید آنرا زاویه را اندازه گرفت و در جای مد ه ح قرار داد و همین ملاحظات را باید نمود در آنحالت که نقطه م واقع

باشد در زاویه مقابله به ه ح ه یا به ه ه ح

و هرگاه $\frac{1}{2}$ (سه + جه) = ۹۰° و دَ = د مساوات (ب) منجر میشود به

ه = ه یعنی هیچ جواب از آن زاوی معلوم نشود و در اینحالت مسئله بیاله است زیرا

که چون سه + جه معادلست با ۱۸۰ آنگاه معلوم میشود که ذوارجعه اضلاع ح ه م

در دایره محاط میشود و در اینصورت شرط امکان مسئله نیست که زاویه ح م ه

برابر باشد با ح ه ه و زاویه ه م ه با ه ح ه و آنوقت لازم آید که دَ = د یعنی

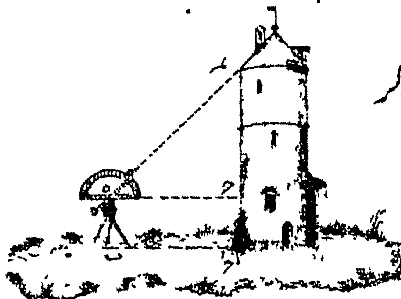
$\frac{\text{ح جب ل}}{\text{جب ل}}$ = د یا آنکه $\frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{\text{جب ل}}{\text{جب ک}}$ چراکه $\frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{\text{جب ه ح ه}}{\text{جب ه ه ح}}$

پس اگر ذوارجعه اضلاع در دایره محاط شود و زاویه ل مساوی باشد با ح ه ه

و زاویه ل با ه ح ه ما از جمیع نقاط دایره محیطیه هر کدام از دو فاصله ح ه و ه ه را

بزاویه مشخصه می بینیم

نوع چهارم مسئله ۵ میخواهیم مشخص کنیم ارتفاع ه ح عمارتی را که وصول بمسقط الحجرش ممکن باشد ۹۴



پس زمین را هموار فرض میکنیم و آن عمارت اگر

مثلاً بشکل برج باشد قرارگاه ب

آلت را چنان اختیار میکنیم که فاصله اش

از موقع برج نسبت بارتفاع مطلوب

چندان طویل باشد و نه چندان قصیر

و زاویه یاب را آنجا نصب میکنیم و شعاعی افقی بسمت محور برج ممتد میداریم و شعاعی

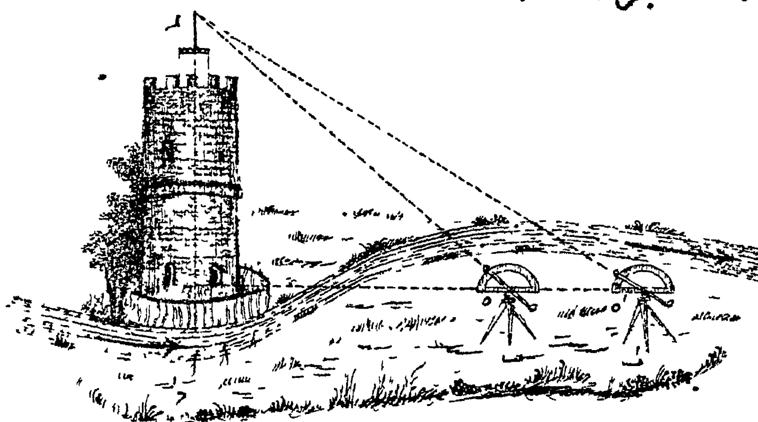
بسمت راسش ه لهذا سطح دایره برنجی را با شاغول بوضع قیام قرار میدهیم پس طول

خیط او باید بر سطح دایره منطبق شود و عضاده ساکن را بوضع افقی میداریم پس تا مدة

شاغول بمرکز دایره و بدرجه ٩٠ گذرد و عضاده متحرک را باستقامت ه د میاوریم
ومقدار زاویه ح ه د را میخوانیم و بعد فاصله ب ز را که مساویست با ه ح باز نجیر
اندازه میکیریم و آنوقت در مثلث قائم الزاویه ح ه د زاویه ح ه د وضلع ه ح
برا معلومست پس ضلع د ح را استخراج میکنیم و آن ارتفاع رأس برج است از
سطح افقی که بر مرکز زاویه یاب گذرد (رجوع کنید بحالت سیم ف ٧٥) و قامت
آلت را بر آن اضافه میکنیم

مثال ح ه = ٤٤ ٨ر٥٤ و ح ه د = ″١٨ ′٤٦ °١٥ جواب د ح = ٤٩٨ ر ٦٨

٩٥ نوع دوم مسئله — میخواهیم مشخص کنیم ارتفاع د ز عمارتی را که وصول
بمسقط الحجر آن ممکن نباشد



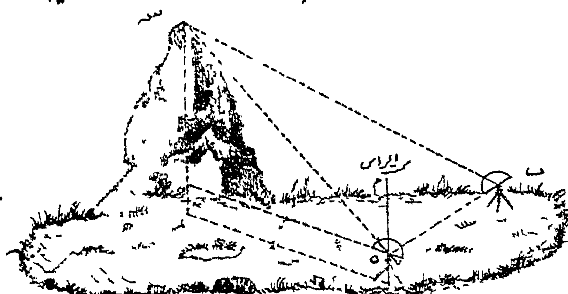
در اینحالت مبنای افقی مثل ب ب ا اختیار میکنیم که استقامتش بر مرکز برج گذرد و از
طرفینش رأس د دیده شود و طولش را اندازه میکیریم و بعد دو زاویه د ه ح و
د ه ب را با زاویه یاب و تمام زاویه اول را تا ١٨٠ درجه میکیریم و آنوقت در مثلث د ه ه

ضلع ه ه′ = ب ب′ و دو زاویه جنبین آن برا معلوم ست وضلع ه د را استخراج میکنیم
وبعد در مثلث قائم الزاویه د ح ه ضلع ه د وزاویه د ه ح معلوم ست ضلع د ح
را استخراج میکنیم (حالت اول ۶۸) وطول قامت آلت را بر آن اضافه میکنیم تا ارتفاع
مطلوب بدست آید

مثال ه ه′ = ۲۶۲٫۱۴ و زاویه د ه ح = ۲۹° ۴′ و زاویه د ه′ ه = ۳۳° ۱۷′
اول تکمیل زاویه د ه′ ح را میگیریم د ه ه′ = ۱۳۸° ۳۱′ پس ه د ه′ = ۱۲° ۸′

عمل تعیین ارتفاع د ح	عمل استخراج ضلع د ه
لل د ه = ۲٫۱۷۵۴۳۳۵۶	لل ه ه′ = ۲٫۴۱۹۱۴۵۲
لل جب ۲۹° = ۹٫۸۲۱۱۱۳۱۷	لل جب ه ه′ = ۹٫۷۳۹۳۹۸۰
لل د ح = ۲٫۰۵۷۵۴۵۷۳	متمم لل جب ه د ه′ = ۰٫۶۸۴۵۷۹۲۴
ارتفاع د ح = ۳۲٫۶۲۳	لل د ه = ۲٫۱۷۵۴۳۳۵۶
وباید ارتفاع آلت را بر آن اضافه نمود	د ه = ۱۴۹٫۸۶۵

۹۶ نود وششم مسئله ۷ - میخواهیم ارتفاع کوهی را مشخص کنیم



اول مبنای ه ب را اختیار میکنیم وطولش را اندازه میگیریم ودو طرفش دو زاویه
س ه ب و س ب ه را معلوم میکنیم وآنوقت در مثلث س ه ب دو زاویه و ضلع

جیبها.

پہنا معلوم ست وضلع سه ه را استخراج میکنیم ودر نقطه ه اندازه میکنیم زاویه سه ه م که توهم میشود ما بین خط قائم وشعاع سه ه وتمیم آنرا معلوم میکنیم و اتوث درمثلث قائم الزاویه سه ح ه وتر سه ه وزاویه سه ه ح معلوم ست وضلع سه ح را استخراج میکنیم وآن ارتفاع قله کوه است از سطح آلت

مثال ه ب = ۴۸ ر ۱۸۶۱ و سه ب ه = ۵۰ " ۸ ' ۴۲ ° و سه ه ب = ۴۰ " ۲۸ ' ۱۱۴ ° و سه ه ح = ۲۰ " ۳۱ ' ۶۵ °

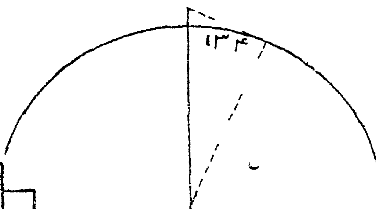
جواب ح سه = ۵۵ ر ۲۸۷

۹۷ نود و هفتم. مسئله ۸ - میخواهیم مشخص کنیم طول ضلع کثیر الاضلاع منتظم را که صاحب ۵۴ ضلع باشد ومحاط باشد در دایره که نصف قطرش ۴ ۲ ر ۲۱۶ ذرع میشود

از مرکز دایره خطی بر وسط ضلع وخطی دیگر بر طرفش وصل کنید تا مثلث قائم الزاویه حادث شود ودر آن مثلث طول وتر ح مساویست با ۴ ۲ ر ۲۱۶ ذرع وزاویه حاده مرکزیه مساویست با یکجزء از ۱۰۸ اجزو ۶ ر ۳ه یعنی با ۳ه ۲۰ است وضلع مقابل باز او یه نصف طول مطلوب است پس مثلث را حل میکنیم ونصف ضلع ۱۲٫۵۷۴ ذرع شد

وبنابراین تمام ضلع ۱۴۸ ر ۲۵ ذرع است

۹۸ نود و هشتم - مسئله ۹ چند ذرع باید از سطح زمین بلند شد تا اینکه فاصله مسقط البحر از حد بصر ۱۳۴ فرسنگ باشد از روی شکل ظاهر است که مسئله منجر میشود بحل مثلث قائم الزاویه که یک ضلع مجاور بزاویه



قائمه و یکزاویه حاده اش معلومست و ضلع معلوم نصف قطر زمین است و مساویست با ۳۸۲۷۷۵۱۲ (محیط زمین بحسب فرسخ صحیح شاه) وزاویه حاده مقابل است بقوسی از دایره عظیمه زمین که ۱۳۴ فرسنگ ششهزار ذرعی طولش باشد و عدد درجات قوس این مساوات استخراج میشود ل/۳۶۰ = ۶۰۰۰ × ۱۳۴ / ۳۸۲۷۷۵۱۲ و ل = ۳° ۴۶′ ۴۸″ پس وتر مثلث را معلوم میکنیم و نصف قطر زمین را از آن تفریق مینمائیم تا ارتفاع مطلوب بدست آید

(۹۹) مسئله میخواهیم معلوم کنیم نصف قطر دایره محاطیه و نصف قطر دایره محیطیه بر مثلثی را که هر سه ضلعش معلوم فرض شده

فرض میکنیم ه نصف قطر دایره محاطیه در مثلث ح ب ه باشد و ن نصف قطر دایره محیطیه بر مثلث و س سطح مثلث و ط نصف مجموع محیط

پس س = ط ه و ه = س/ط = √(ط (ط − ح) (ط − د) (ط − ه) / ط²) = √((ط − ح) (ط − ب) (ط − ه) / ط)

و چون بدستور العمل ذیل رفتار کنیم باز همین دستور استخراج میشود

نقاط ا و ب و د نقاط تماس دایره محاطیه در مثلث باشند با اضلاع ح و د و ه پس ح د = ط − ح زیرا که مجموع سه خط مماس ح د و ب ا و ا ه مساویست با نصف محیط مثلث و بنابراین ح د = ط − (ب ا + ه ا) = ط − ح و در مثلث قائم الزاویه ح م د ضلع م د = ح د ظل م ح د یا آنکه

ه = (ط − ح) ظل ح/۲ = (ط − ح) √((ط − د) (ط − ه) / ط (ط − ح)) =

= √((ط − ح) (ط − د) (ط − ه) / ط)

و اما نصف قطر ن در اصول هندسه ثابت نموده ایم که حاصل ضرب سه ضلع مثلث مساویست با اربعة امثال حاصل ضرب مساحت مثلث در نصف قطر دایره محیطیه یعنی ح د ه = [illegible]

وبنابراین $ن = \frac{ح د هـ}{۴ سم} = \frac{ح د هـ}{۴\sqrt{ط(ط-ح)(ط-د)(ط-هـ)}}$

وبوجه ذیل نیز همان دستور استخراج شود

ازمرکز م از دایره محیطه بر مثلث ح د ه نصف قطر م د را رسم کنید و عمود م ا را

بر ضلع د ه اخراج کنید پس در مثلث قائم الزاویه

م د ا ضلع د ا = م د حب د م ا یا آنکه

$\frac{ح}{۲} = ن$ حب ح و حب ح =

$\frac{۲}{د هـ}\sqrt{ط(ط-ح)(ط-د)(ط-هـ)}$ پس

$\frac{ح}{۲} = ن\frac{۲}{د هـ}\sqrt{ط(ط-ح)(ط-د)(ط-هـ)}$

$ن = \frac{ح د هـ}{۴\sqrt{ط(ط-ح)(ط-د)(ط-هـ)}}$

۱۰۰ صدم مسئله ۱۱ - در ذو اربعة اضلاع ح د ه ب طول دو قطر

ح ه و د ب و زاویه بینهما ح ا د

معلوم است و مطلوب مساحت آن

مساحت ح ا د = $\frac{۱}{۲}$ ح ا . د ا حب ح ا د

ومساحت ه ا د = $\frac{۱}{۲}$ ه ا . د ا حب ه ا د

وچون این دو مساوات را جمع کنیم و ملاحظه نمائیم که دو زاویه مکمله ح ا د و ه ا د صاحب

جیب واحد میباشند این مساوات نتیجه میشود

مساحت ح د ه = $\frac{۱}{۲}$ ح ه . د ا حب ح ا د

وهمچنین ثابت میکنیم که مساحت ح ب ه = $\frac{۱}{۲}$ ح ه . ب ا حب ح ا ب =

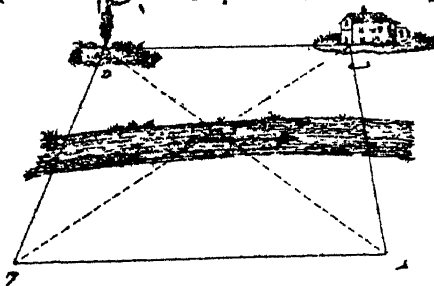
= $\frac{۱}{۲}$ ح ه . ب ا حب ح ا د

پس مساحت ح د ه + ح ب ه یا ح د ه ب = $\frac{۱}{۲}$ ح ه . د ب حب ح ا د

یعنی که مساحت ذوار بعة الاضلاع مساویست با نصف حاصل ضرب دو قطرش در جیب زاویه بینهما

مثال عمل تثلیث

۱۰۱ میخواهیم فاصله مابین دو نقطه غیر ممکن الوصول ه و ب را مشخص کنیم (ت ۹۰)



معلومات

ج د = ۵۸٫۴۶۲

ج ه د = ۵۳° ۱۹′ ۵۰″

ه ج د = ۸۵° ۲۷′ ۲۴″

ب د ج = ۸۱° ۱۸′ ۴۷″

ب ج د = ۴۲° ۱۸′ ۳۱″

ه د ب = ۲۶° ۵۸′ ۵۷″

مجهول ه ب = ۴۷٫۵۰۵

باید اول دو ضلع ه د و ب د را استخراج نمود ت ۹۰ و یا لل ه د و لل ب د را
چونکه بعد از تعیین این دو خط مثلثی هرگاه زاویه ف را بدستور ت ۷۶ استعمال کنیم
زود بجواب میرسیم پس مشغول شویم باستخراج لل ه د و لل ب د

در تعیین لل ه د از روی مثلث ج ه د

دستور $\frac{\text{ه د}}{\text{ج د}} = \frac{\text{حس ه ج د}}{\text{حس ج ه د}}$ و از آنجا $\text{ه د} = \frac{\text{ج د حس ه ج د}}{\text{حس ج ه د}}$

و لل ه د = لل ج د + لل حس ه ج د + مع لل حس ج ه د − ۱۰

تفصیل اعمال

لل ج د = ۱٫۷۶۶۹۱۰۸

لل حس ه ج د = ۹٫۹۹۸۶۳۳۲

مع لل حس ج ه د = ۰٫۱۸۱۲۰۸۲

۱۱٫۹۴۶۷۵۲۲

لل ه د = ۱٫۹۴۶۷۵۲۲

لل ج د یا لل ۵۸٫۴۶۲ = ۱٫۷۶۶۹۱۰۸

در تعیین لل حس ه ج د

ه ج د = ۸۵° ۲۷′ ۲۴″

لل حس ۸۵° ۲۷′ ۲۰″ = ۹٫۹۹۸۶۳۲۵ (تفاضل ۱۷)

بازاء ۴″ ۶٫۸

لل حس ۸۵° ۲۷′ ۲۴″ = ۹٫۹۹۸۶۳۳۲

در تعیین مع لگ حس ح ه م

ح ه م = ۱۸۰° − (ح م ه + ه ح م)

ح م ه = ۵۳° ۱۹′ ۵۰″

م ح ه = ۸۵ ۲۲ ۲۴

۱۳۸° ۴۲′ ۱۴″

۱۸۰° = ۱۷۹ ۵۹ ۶۰

ح ه م = ۴۱° ۱۲′ ۴۶″

لگ حس ۴۱° ۱۲′ ۴۵″ = ۹٫۸۱۸۷۷۶۹ (تفاضل ۲۴۰)

بازاء ۰″۶ ۱۴۴

لگ حس ۴۱° ۱۲′ ۴۵″۶ = ۹٫۸۱۸۷۹۱۳

مع لگ حس ح ه م = ۰٫۱۸۱۲۰۸۷

در تعیین لگ م ب از روی مثلث ح ب م

ب م / ح م = حس ب ح م / حس ح ب م و ب م = ح م حس ب ح م / حس ح ب م

لگ ب م = لگ ح م + لگ حس ب ح م + مع لگ حس ح ب م − ۱۰

لگ ح م = ۱٫۷۶۶۹۱۰۸

لگ حس ب ح م = ۹٫۸۶۶۲۹۷۱

مع لگ حس ح ب م = ۰٫۱۰۷۱۹۰۸

۱۱٫۷۴۰۳۹۸۷

لگ ب م = ۱٫۷۴۰۳۹۸۷

تفصیل اعمال

ب ح م = ۴۲° ۱۸′ ۳۱″

لگ حس ۴۲° ۱۸′ ۳۰″ = ۹٫۸۶۶۲۹۵۲ (تفاضل ۱۹۴)

بازاء ۱″ ۱۹

لگ حس ۴۲° ۱۸′ ۳۱″ = ۹٫۸۶۶۲۹۷۱

در تعیین مع لگ حس ح ب م

ح ب م = ۱۸۰° − (ب م ح + ب ح م)

ب م ح = ۸۱° ۱۸′ ۴۲″

ب ح م = ۴۷ ۱۸ ۳۱

۱۲۸ ۳۷ ۱۸

۱۸۰° = ۱۷۹ ۵۹ ۶۰

ح ب م = ۵۱° ۲۲′ ۴۲″

لگ حس ۵۱° ۲۲′ ۴۰″ = ۹٫۸۹۲۸۰۵۸

بازاء ۲″ ۳۴

لگ حس ۵۱° ۲۲′ ۴۲″ = ۹٫۸۹۲۸۰۹۲

مع لگ حس ح ب م = ۰٫۱۰۷۱۹۰۸

حال در مثلث ہ ب د چون زاویه ہ د ب = د و لك ہ د و لك ب د معلوم است ضلع ہ ب بآسانی مشخص میشود پس اول مشغول شویم بتعیین زاویه ہ ب د = ب وزاویه ب ہ د = ہ واینحالت ب ۲۵ است رجوع کنید به ب ۲۶

در تعیین $\frac{ب + ہ}{۲}$

$ب + ہ = ۱۸۰^\circ - د$

$۱۸۰^\circ = ۱۷۹^\circ\ ۵۹'\ ۶۰''$

$د = ۲۷\ ۵۸\ ۵۷$

$ب + ہ = ۱۵۲^\circ\ ۱'\ ۳''$

$\frac{ب + ہ}{۲} = ۷۶^\circ\ ۰'\ ۳۱٫۵$

در تعیین $\frac{۱}{۲}$ (ب ـ ہ)

$ظل \frac{۱}{۲} (ب - ہ) = \frac{(ہ د - ب د) ظل \frac{۱}{۲} (ب + ہ)}{ہ د + ب د}$

$یا ظل \frac{۱}{۲} (ب - ہ) = ظل (۴۵^\circ - ف)\ ظل \frac{۱}{۲} (ب + ہ)$

و ف زاویه فرض شده که ظلش مساوی باشد با $\frac{ب د}{ہ د}$ ب ۲۶

لك ظل ف = لك ب د + مع لك ہ د

$لك ظل \frac{۱}{۲} (ب - ہ) = لك ظل (۴۵^\circ - ف) + لك ظل \frac{۱}{۲} (ب + ہ) - ۱۰$

در استخراج زاویه ف وزاویه ۴۵° ـ ف

لك ب د = ۱٫۷۴۰۳۹۸۷	در تعیین ف از روی لکاریتم ظلش .
مع لك ہ د = ۸٫۰۵۳۲۴۷۳	لك ظل ف = ۹٫۷۹۳۶۴۶۰ (نقل فصل ۹ ع ۴۶)
لك ظل ف = ۹٫۷۹۳۶۴۶۰	بازاء ۹۷۹۳۶۳۱۷ ــ $۳۱^\circ\ ۵۴'\ ۲۰''$
ف = $۳۱^\circ\ ۵۴'\ ۲۳''$	بازاء ۱۴۳ ــ $۳''$
۴۵° ـ ف = $۱۳^\circ\ ۷'\ ۳۷''$	ف = $۳۱^\circ\ ۵۴'\ ۲۳''$

دیگر تعیین لك ظل $\frac{۱}{۲}$ (ب ـ ہ)

لك ظل (۴۵° = ف) = ۹٫۳۶۷۷۳۴۳

لك ظل (ب + ه)/۲ = ۰٫۶۰۳۵۱۱۶

لك ظل (ب − ه)/۲ = ۹٫۹۷۱۳۴۵۹

(ب − ه)/۲ = ۴۳° ۶′ ۱۶٫۷″

(ب + ه)/۲ = ۷۶° ۰′ ۳۱٫۵″

(ب − ه)/۲ = ۴۳° ۶′ ۱۶٫۷″

ب = ۱۱۹° ۶′ ۴۸٫۲″

ه = ۳۲° ۵۴′ ۱۴٫۸″

تفصیل اعمال

در تعیین لك ظل (۴۵° − ف)

لك ظل ۱۳° ۷′ ۳۰″ = ۹٫۳۶۷۶۶۷۶ (تفاضل ۹۵۲)

بازاء ۷″ ۶۶۷

لك ظل ۱۳° ۷′ ۳۷″ = ۹٫۳۶۷۷۳۴۳

در تعیین لك ظل (ب + ه)/۲

لك ظل ۷۶° ۰′ ۳۰″ = ۰٫۶۰۳۴۹۸۱ (تفاضل ۱۸۰)

بازاء ۱″ ۹۰

بازاء ۰٫۵″ ۴۵

لك ظل ۷۶° ۰′ ۳۱٫۵″ = ۰٫۶۰۳۵۱۱۶

در تعیین (ب − ه)/۲ از روی لگاریتم

لك ظل (ب − ه)/۲ = ۹٫۹۷۱۳۴۵۹ (تفاضل ۴۲۲)

بازاء ۴۳° ۶′ ۱۰″ ۹٫۹۷۱۳۱۷۶

۲۸۳

بازاء ۶″ ۲۵۳۲

بازاء ۰٫۷″ ۲۹۸۰

(ب − ه)/۲ = ۴۳° ۶′ ۱۶٫۷″

در استخراج ه ب

دستور ه ب / ب د = حب د / حب ه و ه ب = ب د حب د / حب ه

لك ه ب = لك ب د + لك حب د + متمم لك جیب ه − ۱۰

لك ب د = ۱٫۲۳۰۳۹۸۲

لك حب د = ۹٫۶۷۱۳۵۹۲

متمم لك جیب ه = ۰٫۲۶۵۰۱۲۵

۱۱٫۶۷۶۷۷۰۹

لك ه ب = ۱٫۶۷۶۷۷۰۹

ه ب = ۴۷٫۵۰۸۵

در تعیین لك حب د

لك حب ۲۷° ۵۸′ ۵۰″ = ۹٫۶۷۱۳۳۲۰ (تفاضل ۳۹۶)

بازاء ۷″ ۲۷۷

لك حب ۲۷° ۵۸′ ۵۷″ = ۹٫۶۷۱۳۵۹۷

در تعیین لك حب ه

لك حب ۳۲° ۵۴′ ۱۰″ = ۹٫۷۳۴۹۷۱۹

بازاء ۴″ ۱۳۰

بازاء ۰٫۸″ ۲۶

لك حب ۳۲° ۵۴′ ۱۴٫۸″ = ۹٫۷۳۴۹۸۷۵

متمم لك حب ه = ۰٫۲۶۵۰۱۲۵

در تعیین ه ب از روی لگاریتم

لك ه ب = ۱٫۶۷۶۷۷۰۹

بازاء ۱٫۶۷۶۷۶۶۲ ۴۷٫۵۰۸ ۴۷

ه ب = ۴۷٫۵۰۸۵

امثلهٔ چند از مثلثات قائم الزوایا

	معلومات	جواب مجهولات
اولاً	وتر = ۳۸۹۷۳٫۱	ه = ۴۷° ۲۲′ ۱۱″
	م = ۴۲° ۳۷′ ۵۸″٫۹	هـ = ۲۸۶۷۳٫۲۱
		د = ۲۶۳۹۶٫۹
ثانیاً	ح = ۴۸۷۲٫۵۷	م = ۵۵° ۳۶′ ۴۶″٫۱
	د = ۳۲۶۵٫۸۹	ه = ۳۹ ۲۳ ۱۳٫۹
		هـ = ۳۵۹۱٫۲۸
ثالثاً	د = ۲۷۸۳۲٫۶۵	ه = ۳۹° ۳۱′ ۵۹″٫۱
	م = ۵۵° ۲۸′ ۵″٫۹	ح = ۳۶۰۸۷٫۳۸
		هـ = ۳۲۹۷۵٫۴۷
رابعاً	د = ۱۸۹۵٫۶۸	م = ۳۸° ۲۹′ ۷″٫۱
	هـ = ۲۳۸۴٫۴۵	ه = ۵۱° ۳۰′ ۵۲″٫۶
		ح = ۳۰۴۶٫۱۷۹

امثلهٔ چند از مثلثات غیر قائم الزوایا

	معلومات	جواب مجهولات
اولاً	ح = ۸۱° ۴۷′ ۱۲″٫۵	د = ۴۳۸۲٫۶۴
	م = ۳۸° ۱۲′ ۴۷″٫۵	هـ = ۶۱۳۵٫۷۱
	ح = ۲۰۱۲٫۲۴	ه = ۶۰° ۰′ ۰″
		س = ۱۳۳۰۷۴۲۳
ثانیاً	ح = ۲۷° ۴۷′ ۴۴″٫۷۷	م = ۳۲° ۱۲′ ۱۵″٫۲۳
	ح = ۲۱۹۹٫۱۲	یا م″ = ۱۴۷° ۴۷′ ۴۴″٫۷۷
	د = ۲۵۱۳٫۲۸	ه = ۱۲۰° ۰′ ۰″
		یا ه″ = ۴° ۲۴′ ۳۰″٫۴۶
		هـ = ۴۰۸۴٫۵۸
		یا هـ″ = ۳۶۲٫۴۹۳

ثالثاً	لگ ح = ۰٫۴۳۲۸۷۵۹۱۱	ح = ۴۹٫۰۴″ ۴۷′ ۵۷° ۷۹
	لگ د = ۰٫۰۰۰۵۸۷۶۴	د = ۲۴٫۱۱″ ۳۴′ ۲۱°
	ه = ۲۴٫۶۲″ ۲۸′ ۳۸° ۷۸	ه = ۲٫۶۲۰۵۸۷
		س = ۱٫۳۱۲۵
رابعاً	ح = ۵۸۹۷٫۲۷	ح = ۲۸″ ۵۴′ ۸۲°
	د = ۴۸۳۱٫۴۸	د = ۲۷٫۶″ ۵۷′ ۵۴°
	ه = ۳۵۶۲٫۴۹	ه = ۴٫۲۴″ ۸′ ۳۲°
خامساً	ح = ۳۲۵۹۵۸٫۴۲	ح = ۱۹٫۸۵″ ۵۰′ ۸۳°
	د = ۲۹۴۶۲۶٫۸	د = ۵۶٫۸۵″ ۱۰′ ۵۱°
	ه = ۳٫۳″ ۴۸′ ۵۸° ۴۴	ه = ۲۶۷۳۸۶٫۴
سادساً	ح = ۲۳۸۶۲٫۴۴	ح = ۲۳″ ۱۶′ ۶۲°
	د = ۲۱۹۸۵٫۶۵	د = ۳۲٫۶″ ۳۸′ ۵۴°
	ه = ۲۴۰۳۷٫۶۷	ه = ۴٫۴″ ۵′ ۶۳°
سابعاً	لگ ح = ۶٫۸۷۶۳۷۸۶	ح = ۳۷٫۱۵″ ۳۴′ ۷۷°
	لگ د = ۴٫۷۲۵۹۷۴۲	د = ۵۶٫۵″ ۴۵′ ۴۳°
	ه = ۲۶٫۸″ ۴۵′ ۵۸°	ه = ۶۵۸۶۵٫۹۵

چند مسئله حل کردنی متعلق بعلم مثلثات

مسئله اول۔ معلوم کنید طول نصف قطر دایره را که فضل قوس ده ذرعی اش بر وترآن قوس اقصر باشد از هزار یک ذرع

مسئله ۲۔ معلوم کنید اجزای مثلثی را که قاعده وارتفاع وتفاضل مابین دو زاویه جنبین قاعده اش مفروض باشد

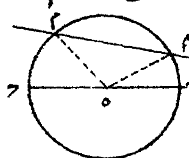
مسئله ۳۔ حل کنید مثلثی را که سه تفاعش معلوم باشد

مسئله ۴۔ معلوم کنید مساحت ذو ذنقه را که چهار ضلعش مفروض باشد

مسئله ۵۔ رسم کنید مثلث متساوی الاضلاعی که رؤسش واقع باشند بر سه دایره

نتیجه المرکز دو یا بر سه خط مستقیم متوازی واقع در یک سطح یا در دو سطح

مسئله ششم - از نقطه ب واقعه بر امتداد



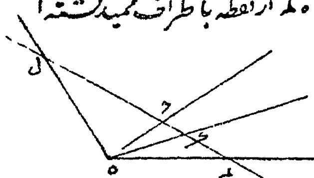
قطر ح ه از دایره ه

خطی مثل ب م م رسم کرده ایم که دایره را

بر دو نقطه م و م قطع کرده پس مبرهن نمایید که مقدار حاصل ضرب ظل $\frac{1}{2}$ م ه ب

× ظل $\frac{1}{2}$ م ه ب در همه حال ثابت است بهر وضع خط قاطع را رسم نموده باشیم

مسئله ۷ - چهار خط ه ل و ه ح و ه ك و ه م از نقطه با طراف ممتد گشته اند



و خط ل ح ك م همه را قطع نموده پس ثابت کنید

که نسبت $\frac{ل ح}{ل م}$: $\frac{ك ح}{ك م}$ در هر صورت ثابت است

مسئله ۸ - چهار سطح ه ل و ه ح و ه ك

و ه م بر خط ه مرور کرده اند بر وجهیکه این خط فصل مشترک همه آنها شده و خط

ل ح ك م هر چهار را قطع نموده پس مبرهن کنید که نسبت $\frac{ل ح}{ل م}$: $\frac{ك ح}{ك م}$ در هر صورت ثابت است

مسئله ۹ - دو کثیر الاضلاع منتظمه که هر کدام صاحب ع ضلع باشند یکی از آن

محیط است بر دایره که نصف قطر نه رسم شده و دیگر محاط است در همان دایره و مقصود

آنست که مساحت هر دو را از روی ع و نه مشخص کنیم و از آن روی استنباط کنیم نسبتی را که در

هندسه مقرر گشته است میان مساحت دو کثیر الاضلاع منتظمه محاطیه و محیطیه که صاحب

ع ضلع و ۲ ع ضلع باشند

۱۰۴ خاتمه در تعیین ابعاد و یا فتن ارتفاعات با مدد مثلثات متشابهه

مسئله اول - چون خواهیم از نقطه ا بعد اب را مشخص کنیم عمودی میان

بر طرف خط موسوم اب خط اد را و به میان از مسافتی بقدر اد و تو هم کنیم خط ب ج

را

را امتداد دهیم تا نقطه ط در جانب

دیگر خط اد

بعد از آن باید بپیمائیم از خط حد مقدار

حه و از نقطه ه عمودی بر خط دا در جهت نقطه ط اخراج نمود تا ملاقی نماید خط

حط را بر نقطه ه و آنوقت طول عمود هه بدست میاید پس آنرا ضرب کنیم در خط

حا و آنچه بر آید قسمت کنیم حاصل را بر خط هح خارج قسمت بعد مطلوب اب است

زیرا که بتشابه دو مثلث قائم الزاویه ابح و هحه این تناسب نتیجه میشود

اب : هه = اح : هح و بعد این تناسب حل = (اح × هه) / هح مثلا هرگاه خط

اح یکصد ذرع و خط هح بیست و پنج ذرع و عمود هه بیست و پنج ذرع باشد ..

۱۲۵ = (۲۵ × ۱۰۰) / ۲۵ = حل

مسئله ۲ - در تعیین فاصله ما بین دو نقطه ا و ب که او یکی از آنها دیگری را

نمیتوان رویت کرد

باید نقطه ثالثی اختیار نمود مثل ه

که از آنجا بتوان هر دو نقطه ا و ب را بنظر آورد

و از آن نقطه پیمود دو بعد

اه و هب را

و هر دو را در جهت دیگر نقطه ه امتداد داد تا دو نقطه ح و ه و بعد جدا کرد از دو خط

هح و هه و یا از دو خط ها و هب دو جزء هد و هط را که متناسب باشند

با دو خط ها و هب و وصل نمود خط دط را و ضرب نمود طولش را در هط [2] و در هر

دو صورت خارج قسمت مقدار مطلوب است

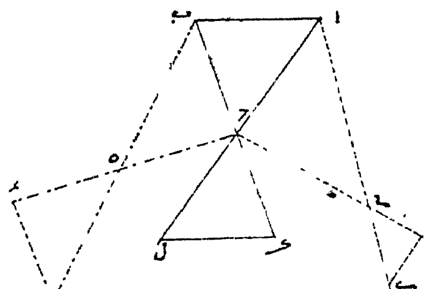
زیرا که بتشابه دو مثلث هاب و هدط این تناسب حاصل میشود حل: دط = ها : هد

[2] در ه ا قسمت نمود حاصل را بر ه د یا آنکه ضرب نمود همان خط دط را در ب ه و قسمت نمود حاصل را

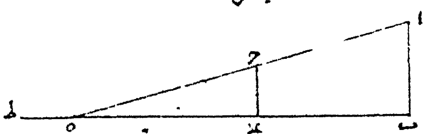
و بعد

وبعد بمساوات مل = $\frac{\text{ال} \times \text{رط}}{\text{ه ر}}$ مثال ال = ۳۵۰ و ه ب = ۴۰۰ و ه ر = ۳۵ و ه ط = ۴۰ و رط = ۶۰ و مل = $\frac{۶۰ \times ۳۵۰}{۳۵}$ = ۶۰۰

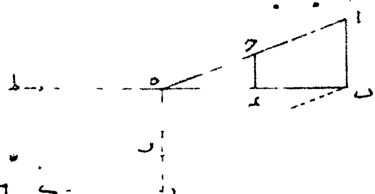
مسئله ۳ - میخواهیم بعد ما بین دو نقطه غیر ممکن الوصول ا و ب را معلوم کنیم پس در نقطه ح ایستاده بوجهیکه در مسئله اولی ذکر شد دو فاصله اح و ب ح را معلوم کنیم و بعد بتشابه دو مثلث اب ح و ل ک ح چنانچه در مسئله دوم گذشت فاصله مطلوب اب را



مسئله ۴ - در تعیین ارتفاع اب که وصول بمسقط الحجر ش ممکن نباشد در نقطه از نقاط ب ط شاخصی مثل م ح بر صفحه زمین نصب کنید و خط اح را بوهم امتداد دهید تا سطح زمین را بر نقطه ه قطع کند پس طول ب ه و م ح و م ه را بپیمائید و حاصل ضرب دو مقدار اول را بر مقدار سیم تقسیم کنید خارج قسمت مقدار مطلوب است زیرا که بتشابه دو مثلث قائم الزاویه اب ه و ح م ه این تناسب نتیجه میشود ه م : ه ب = م ح : ب ا وبعد مل = $\frac{\text{م ح} \times \text{ه ب}}{\text{ه م}}$

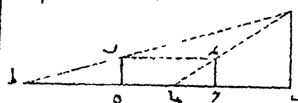


وهرگاه بسبب مانعی پیمودن فاصله ه ب ممکن نباشد باید اول بدستور مسئله اولی بعد ه ب را مشخص نمود و بعد بطریق مسئله مذکور ارتفاع اب را بدست آورد



مسئلهٔ ۴ - در تعیین ارتفاع اب که وصول بمسقط الحجرش ممکن نباشد

بر سطح افق در دو نقطه ح و ه دو شاخص متساوی حد و هر را چنان نصب میکنیم که



این هر دو و راس مرتفع یعنی نقطه ا در سطحی

واقع شوند عمود بر افق و بعد دو شعاع اد و ار

را امتداد میدهیم تا زمین را در دو نقطه ی و ط قطع کنند آنوقت سه فاصله حه و

حی و ه ط را می پیمائیم و حاصل ضرب دو جزء اول را تقسیم میکنیم بر تفاضل ه ط - حی

و خارج قسمت مقدار ب ح است پس حی را بر آن بیفزائیم تا ب ی حاصل شود آن

وقت از روی دو مقدار معلوم بی و حی و شاخص حد و بدستور مسئله سابق

ارتفاع اب را مشخص نمائیم

برهان تشابه دو مثلث ره ط و اب ط این تناسب نتیجه میشود اب : ره = ب ط : ه ط

و نیز تشابه دو مثلث دحی و ابی این تناسب اب : دح یا ره = بی : حی

بی : حی = ب ط : ه ط

و بعد این تناسب

و بتفصیل نسبت بی - حی : حی = ب ط - ه ط : ه ط

یا ب ح : حی = ب ه : ه ط

و بتفصیل نسبت ب ح : ب ه - ب ح = حی : ه ط - حی

یا ب ح : حه = حی : ه ط - حی

و بعد این مساوات ب ح = $\frac{\text{حی} \times \text{حه}}{\text{ه ط} - \text{حی}}$

در تعیین ابعاد بامداد مقیاس و تشابه مثلثات

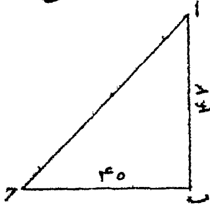
۱۵۵ در چنین اعمال ابتدا اول با اسباب مقدار یک زاویه یا زوایای لازمه مثلث را معلوم کرد

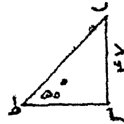
و در روی زمین یک ضلع یا دو ضلع آن مثلث را پیمود و بعد در روی کاغذ مقیاسی کشید

ومثلثی رسم نمود که اضلاع و زوایایش مطابق اضلاع و زوایای مثلث مطلوب باشد بعد از اتمام مثلث طول خط مطلوب را نسبت بمقیاس معلوم کرد برهان این عمل از روی قواعد هندسی ظاهر است و درین باب توضیح چند مثالی ذکر کنیم

۱۰۶ مسئلهٔ اول میخواهیم بعد نقطه ب را از محل ا مشخص نمائیم

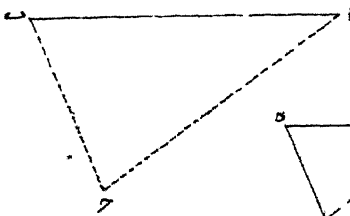
پس مثلث قائم الزاویه ا ب ح را توهم نموده ضلع ب ح را مثلا ۴۰ ذرع جدا میکنیم و زاویه ح را اندازه میگیریم ۵۰ درجه است پس در روی کاغذ مقیاسی رسم نموده مثلث قائم الزاویه د ح ط را مطابق مقیاس و زاویه مزبوره رسم میکنیم یعنی ضلع ح ط را ۴۰ ذرع و زاویه ط را ۵۰ درجه آنوقت طول د ح را بمقیاس میسنجیم ۴۷ ذرع میشود و آن طول ا ب مجهول است

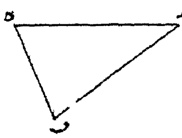




۱۰۷ مسئلهٔ دوم میخواهیم بعد ما بین دو نقطه ا و ب را که مانعی فیما بین آنها واقع است مشخص کنیم

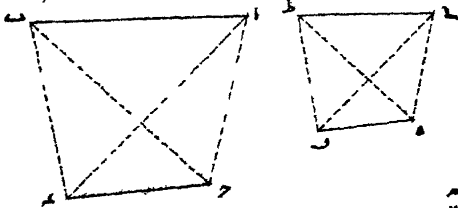
پس در نقطه ح ایستاده مثلث ا ب ح را توهم نموده دو ضلع ح ا و ح ب را پیموده و زاویهٔ ح را با اسباب اندازه گرفته چنین شد ۴۰ ع و ۵۰ ع و ۷۰ ج پس از روی مقیاس بر صفحهٔ کاغذ مثلث د ه و را رسم مینمائیم ..... بر وجهی که ضلع د و بقدر ۴۲ باشد و ه و بقدر ۵۰ و زاویهٔ و بمقدار ۷۰ درجه آنوقت خط د ه را بمقیاس سنجیده ۴۳ ذرع شد





و آن طول اب مطلوب است

۱۰۸ مسئله ۳ - میخواهیم بعد دو نقطه غیر ممکن الوصول اوب را مشخص کنیم



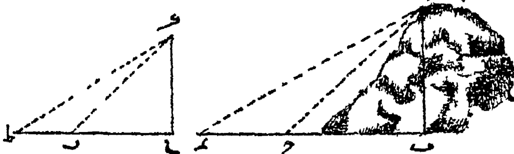
پس در فاصله مبنای حدد را بر زمین کشیده مساحتش میکنیم و دو مثلث احد و ب حد را بر آن توهم نموده در هر کدام دو زاویه چنین قاعده را با اسباب اندازه میکنیم و بعد در صفحه کاغذ با مقیاس خط ه د را مساوی حد رسم میکنیم و دو مثلث ح ه د و طه د را مشابه دو مثلث احد و ب حد و چون دو نقطه ح و ط بدست آمد فاصله بین آنها را با مقیاس اندازه کرده طول مطلوب است

۱۰۹ مسئله ۴ - میخواهیم ارتفاع مناره اب را که وصول بمسقط الحجرش ممکن باشد مشخص کنیم پس در نقطه ط زاویه ارتفاع اطح را با اسباب معلوم نموده ضلع طح را اندازه کرده در صفحه کاغذ با مقیاس مثلث قائم الزاویه



ر ه ه را مشابه با اح ط میسازیم و خط ر ه را با مقیاس اندازه کرده قامت اسباب را بر آن افزوده ارتفاع مطلوب است

۱۱۰ مسئله ۵ - میخواهیم معلوم کنیم ارتفاع تپه اب را که وصول بمسقط الحجرش ممکن نباشد



پس دو نقطه ح و د را بر روی زمین چنان اختیار نموده که با راس تپه در یک سطح قائم باشند و فاصله بین آنها را اندازه کرده و بعد در مثلث

موهوم احد دو زاویه ارتفاع ادب و ادب را با اسباب اندازه گرفته انوقت
بر صفحه کاغذ از روی مقیاس خط ط د را برابر دح رسم نموده وقدری امتدادش
داده تا نقطه ح و در دو نقطه د و ط دو زاویه ل د ح و ل ط ح را برابر ادب
و ادب ساخته و دو ضلع را امتداد داده تا در نقطه ل متلاقی شوند و از انجا
ل ح را بر ط ح عمود نموده طولش را با مقیاس اندازه گرفته ارتفاع مطلوبست

قد تمت فی یوم الاربعا غرة شهر جمادی الآخره
۱۲۹۱
من شهور سنه هجریه عبد الرحیم
شیرازی غفر الله
ذنوبه